

УДК 539.3

# ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ: ОТ ХЛАДНИ (1809) И РИТЦА (1909) ДО НАШИХ ДНЕЙ

В. В. МЕЛЕШКО\*, С. О. ПАПКОВ\*\*

\* Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

\*\* Севастопольский национальный технический университет

Получено 30.09.2009

Рассмотрена классическая задача о колебаниях пластины со свободными краями. На основе метода суперпозиции ее решение сведено к однородной квазирегулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. С помощью достаточного условия существования ограниченного решения для квазирегулярной системы найдены собственные частоты колебаний пластины. Для них на основе анализа асимптотического поведения неизвестных построены нетривиальные решения системы, позволяющие получить аналитические представления собственных форм колебаний. Исследована точность выполнения однородных граничных условий, проведено сравнение теоретических данных с экспериментальными.

Розглянуто класичну задачу про коливання пластини з вільними краями. На базі методу суперпозиції її розв'язання зведено до однорідної квазирегулярної нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. За допомогою достатньої умови існування обмеженого розв'язку для квазирегулярної системи знайдені власні частоти коливань пластини. Для них на базі аналізу асимптотичної поведінки невідомих побудовані нетривіальні розв'язки системи, які дозволяють одержати аналітичні представлення власних форм коливань. Досліджено точність виконання однорідних граничних умов, проведено порівняння теоретичних даних з експериментальними.

A classic problem on vibration of the plate with free edges has been considered. On the base of the superposition method, its solving has been reduced to a homogeneous quasiregular infinite system of linear algebraic equations. Plate's eigenfrequencies have been found using the sufficient condition for existence of a limited solution of a quasiregular system. The nontrivial solutions of the system corresponding to these frequencies have been constructed by analyzing the asymptotic behavior of the unknown values, that allow the obtaining of analytical representations for vibration eigenforms. The accuracy of satisfying of the homogeneous boundary conditions has been studied and theoretical data have been compared with the experimental ones.

## ВВЕДЕНИЕ

В этом году были отмечены юбилеи двух замечательных публикаций, относящихся к классической задаче о колебаниях тонких изотропных прямоугольных пластин со свободными краями – двухсотлетие французского перевода [1] классического трактата Хладни по акустике [2] и столетие статьи [3], посвященной первому применению вариационного метода Ритца (сам автор назвал его *Die Integrationsmethode*) для расчета собственных частот и форм колебаний квадратной пластинки.

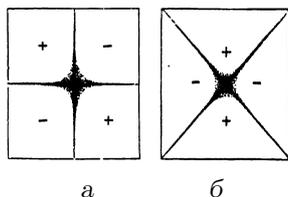


Рис. 1. Фигуры в классическом эксперименте Хладни (по книге [8])

Первому из указанных событий предшествовала демонстрация Хладни в Париже своих знаменитых песочных фигур. Классическая постановка эксперимента Хладни выглядит так. Если закрепить в тисках центр стеклянной или металлической квадратной тонкой пластинки, посыпать ее сверху мелким песком, коснуться пальцем точки в середине одной из свободных сторон и провести смычком по противоположному краю ближе к одному из углов, то песок соскакивает с большей части поверхности и собирается по длине двух узловых линий, которые разделят большой квадрат на четыре меньшие, рис. 1, а. Знаками “+” и “-” обозначены противоположные направления движения частиц внутри соответствующих им квадратов, а покоящиеся узловые линии обозначают границы этих противоположных движений. Посыпав еще раз песком поверхность пластинки, коснувшись одного из ее углов и проведя смычком по середине одного из краев, можно получить две резко обозначенные полосы, проходящие по диагоналям, рис. 1, б.

Именно таким образом Хладни [2] получил ин-

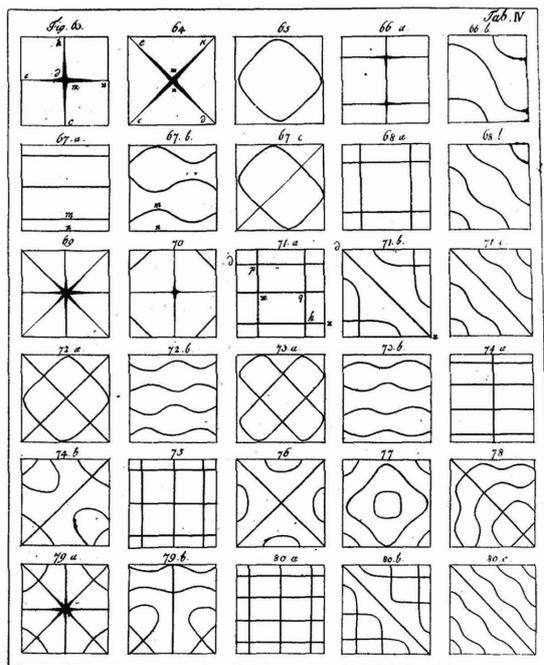


Рис. 2. Набор песочных фигур Хладни



Рис. 3. Хладни демонстрирует свои знаменитые песочные фигуры, Регенсбург 1800

интересный набор фигур (рис. 2) и сделал попытку их классификации согласно количеству горизонтальных и вертикальных узловых линий на краях. При этом он много путешествовал по Европе<sup>1</sup>, демонстрируя опыты с пластинками знатной публике (рис. 3).

В феврале 1809 года в дворце Тюильри, официальной резиденции императора Наполеона Бонапарта, в присутствии императора с супругой и его матери, ученых Лапласа и Бертоле и других

<sup>1</sup> Детальная биография Хладни приведена в статье [6].



Рис. 4. Эрнст Флоренс Фридрих Хладни (Chladni), 1756–1827. Родился в один год с Моцартом, умер в один год с Бетховеном

зрителей Хладни продемонстрировал свои эксперименты. Имеются [2, 5] записи самого Хладни об этой демонстрации. Наполеон был настолько восхищен увиденным, что на следующее утро распорядился выдать Хладни 6000 франков для перевода на французский язык и публикации его немецкой книги [2]. Этот заказ был быстро выполнен (рис. 5), причем, по совету Лапласа, Хладни попросил разрешения у Наполеона посвятить книгу императору – воистину, политика иногда непредсказуемым образом влияет на науку. В качестве приложения в книге на 14 страницах приведен протокол заседания отделений математических и физических наук и изящных искусств французской Академии наук [1, с. 353–357], в котором дана развернутая оценка экспериментов Хладни.

Наполеон установил приз в 3000 франков за разработку математической теории колебаний пластин и теоретическому описанию фигур Хладни – узловых линий колеблющихся пластин. Следуя этому, отделение математических и физических наук также установила приз в виде золотой медали стоимостью 3000 франков за создание такой теории и сравнение результатов с экспериментами с конечной датой подачи материалов к октябрю 1811 года [1, с. 353–357]. После нескольких попыток решения и последовавших жарких дискуссий [7] приз в 1816 году был присужден Софи Жермен в знак существенного прогресса в этой проблеме, хотя окончательное уравнение для изгибных колебаний пластинки оказалось неточным (Лагранж, будучи членом жюри, указал, как исправить ошибку).

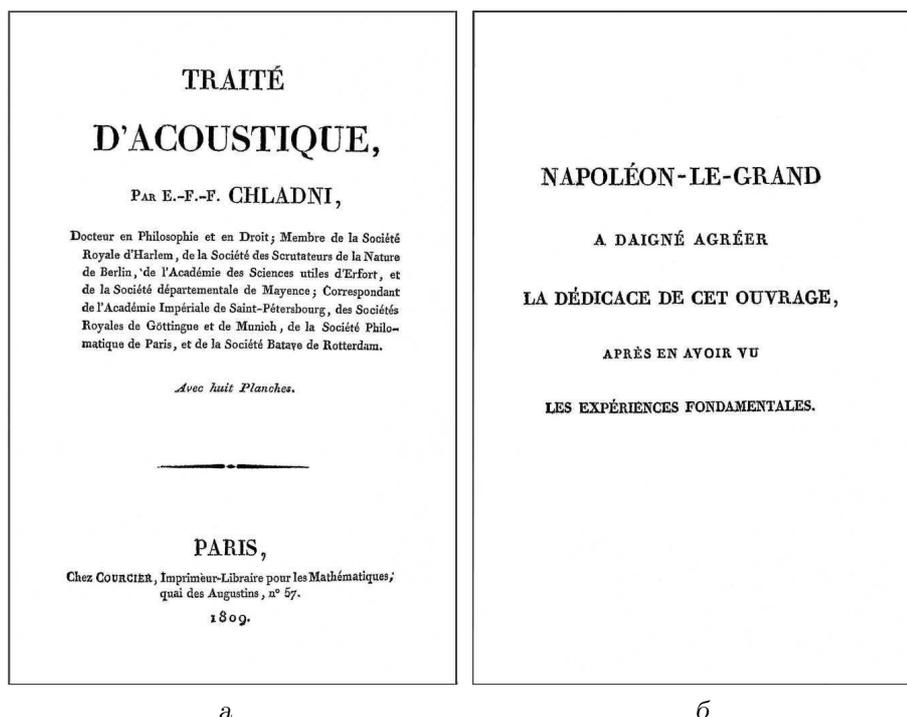


Рис. 5. Французский перевод [1] немецкой книги [2]:  
а – титульный лист, б – посвящение

В последующие 200 лет фигуры Хладни экспериментально воспроизводились и классифицировались в большом количестве исследований. В их ряду следует назвать две классические книги [8, 10], первая из которых выдержала шесть английских<sup>2</sup> (в 1867–1895 гг.), пять американских (в 1867–1915 гг.) и три русских (в 1870–1922 гг.) изданий [9]. Для того, чтобы подчеркнуть непреходящий интерес к этому красивому физическому явлению, упомянем также несколько наиболее интересных статей [11–15]. В этих и во многих других публикациях, кроме многочисленных картин фигур Хладни квадратных пластин с разными размерами и из различных материалов, сделаны первые сравнения экспериментальных и расчетных данных о собственных частотах пластины.

Статья Ритца [3], рис. 6 (увы, последняя в его недолгой, но яркой жизни), содержала изумительный по ясности теоретического изложения и количеству числовых данных анализ спектра собственных частот и форм колебаний квадратной пластинки со свободными краями и сравнение с экспериментами Хладни.

Надо отметить, что подход, основанный на при-

<sup>2</sup>Примечательно, что первые два английских издания содержали на фронтисписе (контртитule) портрет Хладни из его первой книги [2], рис. 4.

равнении максимальных амплитудных значений за период при выбранной заранее форме колебаний был впервые применен для определения низшей собственной частоты изгибных колебаний квадратной пластинки со свободными краями при нулевом коэффициенте Пуассона Рэлеем [16], вполне оценившим трудность этой задачи. Впоследствии он получил название метода Рэля и полностью воспроизведен в его классическом сочинении [17, § 226]. Статьи [19–21] содержат интересную дискуссию относительно названий методов Рэля и Ритца применительно к вариационному подходу.

Впервые используя вариационный алгоритм для исследования колебаний квадратной пластинки со свободными краями, Ритц [3] обратил внимание на важное обстоятельство, ускользнувшее от внимания практически всех других исследователей (кроме Рэля [18]), и сделал предположение о том, что собственные формы колебаний пластинки достаточно надежно описываются комбинациями  $u_m(x)u_n(y) \pm u_n(x)u_m(y)$ , в которых  $u(x)$  – собственные функции упругого стержня со свободными краями.

В последующие годы задача о колебаниях пластины со свободными краями была предметом исследований многих авторов, обзор работ которых

дан в [22]. Отметим здесь тщательно выполненную на основе вариационного алгоритма Ритца работу [23]. Среди аналитических подходов к определению собственных частот и форм колебаний прямоугольной пластинки использовался метод суперпозиции [24–26]. Известно, что в вариационном методе Ритца выбор аппроксимирующих функций обеспечивает тождественное выполнение всех нулевых граничных условий, при этом уравнения движения выполняются лишь интегрально. Однако основная идея метода суперпозиции заключается в построении такого набора частных решений, который удовлетворял тождественно уравнению движения и имел достаточно функционального произвола для выполнения нулевых граничных условий. Отметим, что в работах [24, 25] вопрос о точности выполнения нулевых граничных условий не ставился.

Цель данного исследования состоит в раскрытии всех преимуществ метода суперпозиции на основе анализа соответствующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, а также в классификации и оценке точности первых 30 собственных частот и форм, найденных Ритцем [3].

## 1. ПОСТАНОВКА И АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНКИ

Уравнение Жермен–Лагранжа, описывающее малые поперечные колебания упругой изотропной пластинки  $|x| < a$ ,  $|y| < b$  постоянной толщины  $h$ , имеет вид

$$D\Delta\Delta w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Здесь  $w(x, y, t)$  – поперечный прогиб срединной плоскости пластинки;  $\Delta$  – двумерный оператор Лапласа;  $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$  – изгибная жесткость пластинки;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль Юнга;  $\rho$  – удельная плотность на единицу площади пластинки;  $t$  – время.

Задача об определении собственных частот и форм колебаний пластинки со свободными краями сводится к определению прогиба  $W(x, y)$  (гармонический множитель  $e^{-i\omega t}$  здесь и далее опущен) и частоты  $\kappa^4 = \rho h \omega^2 / D$  из однородной краевой задачи

$$\Delta\Delta W - \kappa^4 W = 0 \quad (2)$$



Рис. 6. Вальтер Ритц (Ritz), 1878–1909

с граничными условиями при  $x = \pm a$ :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial x} = 0,$$

и при  $y = \pm b$ :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} = 0.$$

В настоящее время наибольшее распространение получили два аналитических подхода к решению краевой задачи (2)–(4) – метод Ритца и метод суперпозиции. В своей классической работе [3] Ритц указал, что данная краевая задача эквивалентна отысканию минимального значения интеграла

$$J = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (5)$$

при условии, что

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b W^2 dx dy = A = \text{const}. \quad (6)$$

Для конкретного случая квадратной пластинки  $a = 1$ ,  $b = 1$  Ритц выбрал представление

$$W_s = \sum_{m=0}^s \sum_{n=0}^s A_{mn} u_m(x) v_n(y), \quad (7)$$

в котором  $u_m(x)$  и  $v_n(y)$  – собственные функции изгибных колебаний упругого стержня  $\xi < 1$  с обоими свободными краями. Иными словами, эти функции являются решениями однородного уравнения

$$\frac{d^4 u}{d\xi^4} = k^4 u \quad (8)$$

с однородными граничными условиями

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^3 u}{d\xi^3} = 0, \quad \xi = \pm 1. \quad (9)$$

Нормировка выбрана так, чтобы для решения с номером  $m$  было

$$\int_{-1}^1 u_m^2 d\xi = 1.$$

Рэлей [17, §160] детально изучил решение однородной граничной задачи (8), (9) и показал, что искомые функции следует выбрать такими:

- для четного  $m$

$$u_m(\xi) = \frac{\operatorname{ch} k_m \cos k_m \xi + \cos k_m \operatorname{ch} k_m \xi}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 k_m + \cos^2 k_m}}, \quad (10)$$

где  $k_m$  – корень уравнения  $\operatorname{tg} k_m + \operatorname{th} k_m = 0$ ;

- для нечетного  $m$

$$u_m(\xi) = \frac{\operatorname{sh} k_m \sin k_m \xi + \sin k_m \operatorname{sh} k_m \xi}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 k_m - \sin^2 k_m}}, \quad (11)$$

где  $k_m$  – корень уравнения  $\operatorname{tg} k_m - \operatorname{th} k_m = 0$ .

При этом полагалось

$$u_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad k_0 = 0,$$

$$u_1(\xi) = \sqrt{\frac{3}{2}} \xi, \quad k_1 = 0.$$

Подстановка разложения (7) в квадратичное по  $A_{mn}$  выражение (5) с привлечением неопределенного множителя Лагранжа  $\lambda = \kappa^4$  при минимизации интеграла  $J$  и выполнении условия (6) приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно  $A_{mn}$ . Отсюда  $\lambda$  определяется стандартным образом как значение, обращающее в нуль определитель этой линейной системы. При этом все граничные условия (3) и (4) выполнены тождественно.

Для коэффициента Пуассона  $\nu = 0.225$  (стекло, как в экспериментах Хладни) и случая антисимметричных колебаний относительно диагоналей квадрата  $y = \pm x$  (при этом  $A_{mn} = A_{nm}$ ) Ритц взял в

представлении (7)  $s = 5$ , вычислил (вручную!) все необходимые интегралы и получил однородную систему линейных алгебраических уравнений шестого порядка. Он также сумел найти первые два корня определителя этой системы.

Далее было сделано смелое предположение о том, что формы колебаний пластинки определяются лишь главным слагаемым  $u_m(x)v_n(y) \pm u_n(x)v_m(y)$  [3, с. 768], приведена таблица расчета первых 35 (!) собственных частот и их сравнение<sup>3</sup> с экспериментальными данными Хладни [2]. В конце статьи [3, с. 775–784] Ритц привел фигуры узловых линий для форм колебаний на собственных частотах, отвечающие всем четырем типам симметрии относительно осей  $x$  и  $y$ . При этом он всюду брал  $s = 5$ , представлял полное выражение (7) с числовыми коэффициентами и подчеркивал определяющий вклад главных членов. Это была поистине титаническая работа, если учесть отсутствие компьютера и быстро прогрессирующую болезнь автора<sup>4</sup>!

Иной подход, традиционно носящий название метода суперпозиции [24–27], представляет общее решение дифференциального уравнения (2) в виде суммы решений для полос  $|x| \leq a$  и  $|y| \leq b$  в форме тригонометрических рядов. При этом решение выбирается таким образом, чтобы тождественно удовлетворить вторые граничные условия в (3), (4) и иметь достаточный произвол для выполнения оставшихся двух условий.

Возможны четыре типа симметрии прогиба пластинки:  $W_S(x, y)$  – функция четна по  $x$  и по  $y$ ;  $W_{SA}(x, y)$  – функция четна по  $x$  и нечетна по  $y$ ;  $W_{AS}(x, y)$  – функция нечетна по  $x$  и четна по  $y$ ;  $W_A(x, y)$  – функция нечетна по  $x$  и по  $y$ . С помощью стандартного метода разделения переменных решения уравнения (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} W_S &= \frac{bx_0^s}{\kappa} \left( \frac{\cos \kappa y}{\sin \kappa b} - \frac{\operatorname{ch} \kappa y}{\operatorname{sh} \kappa b} \right) + \\ &+ \frac{ay_0^s}{\kappa} \left( \frac{\cos \kappa x}{\sin \kappa a} - \frac{\operatorname{ch} \kappa x}{\operatorname{sh} \kappa a} \right) + \\ &+ b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n^s A(y, b, \alpha_n) \cos \alpha_n x + \\ &+ a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} y_n^s A(x, a, \beta_n) \cos \beta_n y, \end{aligned} \quad (12)$$

<sup>3</sup>По издаваемым нотам – традиционный способ сравнения в те времена.

<sup>4</sup>Статья была закончена в январе 1909 года и поступила в редакцию 14 января, а в июле того же года Ритц умер.

$$W_{SA} = \frac{bx_0^{sa}}{\kappa^2} \left( \frac{\sin \kappa y}{\cos \kappa b} + \frac{\text{sh } \kappa y}{\text{ch } \kappa b} \right) +$$

$$+ b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n^{sa} B(y, b, \alpha_n) \cos \alpha_n x - \quad (13)$$

$$- a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n^{sa} A(x, a, \delta_n) \sin \delta_n y,$$

$$W_A = b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n^a B(y, b, \gamma_n) \sin \gamma_n x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} y_n^a B(x, a, \delta_n) \sin \delta_n y, \quad (14)$$

где введены обозначения

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{a}; \quad \beta_n = \frac{\pi n}{b};$$

$$\gamma_n = \frac{\pi(2n-1)}{2a}; \quad \delta_n = \frac{\pi(2n-1)}{2b};$$

$$A(z, h, \xi) = \frac{\xi^2 + \kappa^2 - (2-\nu)\xi^2}{\sqrt{\xi^2 - \kappa^2}} \frac{\text{ch } \sqrt{\xi^2 - \kappa^2} z}{\text{sh } \sqrt{\xi^2 - \kappa^2} h} -$$

$$- \frac{\xi^2 - \kappa^2 - (2-\nu)\xi^2}{\sqrt{\xi^2 + \kappa^2}} \frac{\text{ch } \sqrt{\xi^2 + \kappa^2} z}{\text{sh } \sqrt{\xi^2 + \kappa^2} h};$$

$$B(z, h, \xi) = \frac{\xi^2 + \kappa^2 - (2-\nu)\xi^2}{\sqrt{\xi^2 - \kappa^2}} \frac{\text{sh } \sqrt{\xi^2 - \kappa^2} z}{\text{ch } \sqrt{\xi^2 - \kappa^2} h} -$$

$$- \frac{\xi^2 - \kappa^2 - (2-\nu)\xi^2}{\sqrt{\xi^2 + \kappa^2}} \frac{\text{sh } \sqrt{\xi^2 + \kappa^2} z}{\text{ch } \sqrt{\xi^2 + \kappa^2} h}.$$

Выражение для  $W_{AS}$  не выписано поскольку, в силу симметрии задачи все соответствующие собственные значения и формы строятся по решению  $SA$  при замене  $x \leftrightarrow y$  и  $a \leftrightarrow b$ :

$$\kappa_{SA}(a/b) = \kappa_{AS}(b/a),$$

$$W_{SA}(x, y, a, b) = W_{AS}(y, x, b, a).$$

Заметим, что по этой причине в случае квадрата собственные числа для случаев “ $AS$ ” и “ $SA$ ” совпадают (у Ритца – двойные тона [3]).

Подстановка решений (12)–(14) в первые из граничных условий (3), (4) с последующим разложением входящих функций в тригонометрические ряды на основе формул [31]

$$\frac{\text{ch } pz}{\text{sh } ph} = \frac{1}{ph} + \frac{2p}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos \xi_m z}{\xi_m^2 + p^2}, \quad \xi_m = \frac{m\pi}{h},$$

$$\frac{\text{sh } pz}{\text{ch } ph} = \frac{2p}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \sin \eta_m z}{\eta_m^2 + p^2}, \quad \eta_m = \frac{(2m-1)\pi}{2h}$$

позволяет из равенства при базисных функциях получить однородные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

### Случай симметрии “ $S$ ”

$$2\nu x_0^s + a\kappa(\text{ctg } a\kappa + \text{cth } a\kappa)y_0^s =$$

$$= 2\nu\kappa^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^s}{p_{1n}^2 p_{2n}^2},$$

$$b\kappa(\text{ctg } b\kappa + \text{cth } b\kappa)x_0^s + 2\nu y_0^s =$$

$$= 2\nu\kappa^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^s}{q_{1n}^2 q_{2n}^2},$$

$$y_m^s \Delta_s(\beta_m, a) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\kappa^2((1-\nu)^2 \alpha_n^2 \beta_m^2 + \nu\kappa^4)}{(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)} x_n^s +$$

$$+ \frac{4\nu\kappa^4 x_0^s}{q_{1m}^2 q_{2m}^2}, \quad (15)$$

$$x_m^s \Delta_s(\alpha_m, b) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\kappa^2((1-\nu)^2 \alpha_m^2 \beta_n^2 + \nu\kappa^4)}{(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)} y_n^s +$$

$$+ \frac{4\nu\kappa^4 y_0^s}{p_{1m}^2 p_{2m}^2},$$

$$m = 1, 2, \dots$$

### Случай симметрии “ $SA$ ”

$$x_0^{sa} = \frac{2\nu\kappa^6}{b(\text{tg } b\kappa - \text{th } b\kappa)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^{sa}}{q_{3n}^2 q_{4n}^2},$$

$$y_m^{sa} \Delta_s(\delta_m, a) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\kappa^2((1-\nu)^2 \alpha_n^2 \delta_m^2 + \nu\kappa^4)}{(\alpha_n^2 + q_{3m}^2)(\alpha_n^2 + q_{4m}^2)} x_n^{sa} +$$

$$+ \frac{4\nu\kappa^3 x_0^{sa}}{q_{3m}^2 q_{4m}^2}, \quad (16)$$

$$x_m^{sa} \Delta_a(\alpha_m, b) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\kappa^2((1-\nu)^2 \alpha_m^2 \delta_n^2 + \nu\kappa^4)}{(\delta_n^2 + p_{1m}^2)(\delta_n^2 + p_{2m}^2)} y_n^{sa},$$

$$m = 1, 2, \dots$$

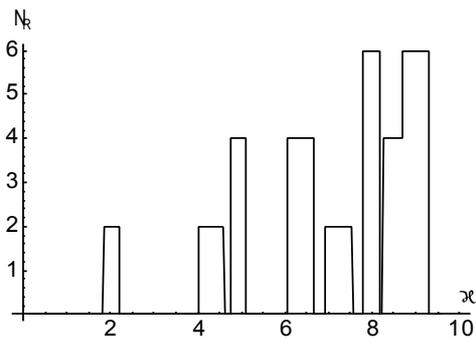


Рис. 7. Зависимость  $N_R(\kappa)$

**Случай симметрии “А”**

$$\begin{aligned}
 x_m^a \Delta_a(\gamma_m, b) &= \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\kappa^2((1-\nu)^2\gamma_m^2\delta_n^2 + \nu\kappa^4)}{(\delta_n^2 + p_{3m}^2)(\delta_n^2 + p_{4m}^2)} y_n^a, \\
 y_m^a \Delta_a(\delta_m, a) &= \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\kappa^2((1-\nu)^2\gamma_n^2\delta_m^2 + \nu\kappa^4)}{(\gamma_n^2 + q_{3m}^2)(\gamma_n^2 + q_{4m}^2)} x_n^a, \\
 m &= 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

В выражениях (15)–(17) введены следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 p_{1n}^2 &= \alpha_n^2 - \kappa^2; & p_{2n}^2 &= \alpha_n^2 + \kappa^2; \\
 p_{3n}^2 &= \gamma_n^2 - \kappa^2; & p_{4n}^2 &= \gamma_n^2 + \kappa^2; \\
 q_{1n}^2 &= \beta_n^2 - \kappa^2; & q_{2n}^2 &= \beta_n^2 + \kappa^2; \\
 q_{3n}^2 &= \delta_n^2 - \kappa^2; & q_{4n}^2 &= \delta_n^2 + \kappa^2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_s(z, h) &= h \left( \frac{((1-\nu)z^2 + \kappa^2)^2}{\sqrt{z^2 + \kappa^2}} \operatorname{cth} \sqrt{z^2 + \kappa^2} h - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{((1-\nu)z^2 - \kappa^2)^2}{\sqrt{z^2 - \kappa^2}} \operatorname{cth} \sqrt{z^2 - \kappa^2} h \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_a(z, h) &= h \left( \frac{((1-\nu)z^2 + \kappa^2)^2}{\sqrt{z^2 + \kappa^2}} \operatorname{th} \sqrt{z^2 + \kappa^2} h - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{((1-\nu)z^2 - \kappa^2)^2}{\sqrt{z^2 - \kappa^2}} \operatorname{th} \sqrt{z^2 - \kappa^2} h \right).
 \end{aligned}$$

Согласно [28], каждую из систем (15)–(17) формально можно записать в виде одного ряда уравнений

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{m,n}(\kappa) z_n. \tag{18}$$

Выражения для элементов бесконечной матрицы  $M_{m,n}$  в зависимости от типа симметрии даны в приложении.

**2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНКИ**

Для исследования регулярности данных систем используем значения известных рядов [31]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \operatorname{cth} \pi a - \frac{1}{2a^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - 1/2)^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \operatorname{th} \pi a,$$

которые позволяют найти точные значения рядов из условий квазирегулярности (см. приложение):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |M_{m,n}(\kappa)| = 1 - \rho_m(\kappa) < 1 \quad m > N_R. \tag{19}$$

Ряды (19) допускают одинаковую асимптотическую оценку

$$\sum_{n=1}^{\infty} |M_{m,n}| = \frac{1-\nu}{3+\nu} + O(1/m), \quad m \rightarrow \infty. \tag{20}$$

Поскольку коэффициент Пуассона может принимать значения  $-1 < \nu \leq 0.5$ , из оценок (20) следует, что всегда найдется такой номер  $N_R$ , что при  $m > N_R$  бесконечная система удовлетворяет условию (19), то есть является квазирегулярной. На рис. 7 показана зависимость данного номера от частоты колебаний квадратной пластины при  $\nu=0.225$  в случае антисимметрии по обоим осям (бесконечная система (17)). Видно, что на графике есть интервалы изменения  $\kappa$ , для которых  $N_R=0$ . Это означает, что система (17) является здесь вполне регулярной, т. е. согласно теории бесконечных систем [33] имеет единственное нулевое решение. Такой предварительный анализ позволяет сразу заключить, что первая собственная частота колебаний должна быть расположена внутри интервала (1.84; 2.23). В статье Ритца [3] она определена как  $\kappa_1^{\text{Ritz}} = 1.877$ .

Можно строго доказать, что исключение любого неизвестного из регулярного уравнения бесконечной системы улучшает регулярность всех остальных уравнений системы, в том числе нерегулярных. Возникает вопрос, нельзя ли путем исключения некоторого количества неизвестных получить на данном значении частоты колебаний  $\kappa$  регулярную относительно оставшихся неизвестных

систему? В рассматриваемой задаче данное утверждение равносильно тому, что однородная бесконечная система имеет только нулевое решение, т. е. частота колебаний заведомо не является собственной. Для обоснования данного подхода в статье [29] доказана теорема о достаточных условиях существования ограниченного решения у квазирегулярной бесконечной системы, а в работе [32] на основе этой теоремы исследован спектр собственных частот плоской задачи теории упругости для прямоугольника в случае первой основной граничной задачи.

Доказать факт существования ограниченного (в случае единственности нулевого) решения согласно указанной теореме можно, проверив условие

$$\max_{j=1 \dots N_T} \sum_{i=1}^{N_T} |c_{ij}(\kappa)| \sum_{n=N_T+1}^{\infty} |M_{i,n}(\kappa)| < 1+h(\kappa), \quad (21)$$

где

$$h(\kappa) = \inf_{m > N_T} \frac{\rho_m(\kappa)}{N_T \sum_{n=1}^{\infty} |M_{m,n}(\kappa)|};$$

$c_{ij}$  – матрица, обратная к матрице  $\{\delta_{ij} - M_{i,j}\}_{i,j=1}^{N_T}$ ;  $N_T$  – порядок матрицы, участвующей в оценках.

Проверяя условие (21) в диапазоне частот с некоторым шагом, можно сузить интервал расположения собственной частоты. При этом для каждого  $\kappa$  по формулам из приложения вычислялся (в зависимости от типа симметрии) ряд

$$\sum_{n=N_T+1}^{\infty} |M_{i,n}| = S_i - \sum_{n=1}^{N_T} |M_{i,n}|,$$

а элементы обратной матрицы  $c_{ij}$  находились численно. Увеличением параметра  $N_T$  удается сузить интервал настолько, что с некоторой точностью получаем значение собственной частоты.

Табл. 1 демонстрирует локализацию первой собственной частоты для квадратной пластинки. Даже при  $N_T = 1$  удается найти значение собственной частоты с удовлетворительной для практики точностью. С использованием данного подхода применительно к системам (15)–(17) были найдены и остальные собственные частоты колебаний пластинки (они представлены в табл. 5).

### 3. ПОСТРОЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНКИ

Для определения собственных форм колебаний требуется построить нетривиальное решение бесконечных систем на полученных собственных ча-

Табл. 1. Вычисление собственных частот

$N_T$	Интервал для $\kappa^*$
1	1.8770, ..., 1.8800
5	1.8780, ..., 1.8793
25	1.8783, ..., 1.8788
100	1.8785, ..., 1.8786

стотах. Опишем алгоритм построения для квазирегулярной бесконечной системы, записанной в форме (18). Согласно [33], ее исследование можно провести с помощью разложения по первым неизвестным

$$z_m = \sum_{j=1}^{N_R} \tilde{z}_m^j z_j, \quad m > N_R, \quad (22)$$

свести к совокупности вполне регулярных систем с одинаковой матрицей и одной конечной системе линейных алгебраических уравнений. Действительно, подставляя разложения (22) в систему (18), из равенства при первых  $N_R$  базисных неизвестных получаем:

- для уравнений с номерами  $m > N_R$

$$\tilde{z}_m^j = \sum_{n=N_R+1}^{\infty} M_{m,n} \tilde{z}_n^j + M_{m,j}; \quad (23)$$

$$j = 1, 2, \dots, N_R$$

- для уравнений с номерами  $m = 1, 2, \dots, N_R$

$$z_m = \sum_{n=1}^{N_R} \left( M_{m,n} + \sum_{j=N_R+1}^{\infty} M_{m,j} \tilde{z}_j^n \right) z_n \quad (24)$$

Коэффициенты конечной системы оказываются зависящими от решений вполне регулярных бесконечных систем (23), поэтому точность построения нетривиального решения исходной системы (18) также определяется точностью их решения. В случае симметрии “А” замена (22) в развернутом виде выглядит следующим образом:

$$x_m^a = \sum_{j=1}^{N_r} (x_m^{1j} x_j^a + x_m^{2j} y_j^a),$$

$$y_m^a = \sum_{j=1}^{N_r} (y_m^{1j} x_j^a + y_m^{2j} y_j^a), \quad (25)$$

$$m = 1, 2, \dots, N_r; \quad N_r = [N_R/2].$$

Вполне регулярные системы (23) при первых  $x_m^a$  в развернутом виде можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 x_m^{1j} \Delta_a(\gamma_m, b) &= \\
 &= \sum_{n=N_r+1}^{\infty} \frac{4\kappa^2((1-\nu)^2\gamma_m^2\delta_n^2 + \nu\kappa^4)}{(\delta_n^2 + p_{3m}^2)(\delta_n^2 + p_{4m}^2)} y_n^{1j}, \\
 y_m^{1j} \Delta_a(\delta_m, a) &= \\
 &= \sum_{n=N_r+1}^{\infty} \frac{4\kappa^2((1-\nu)^2\gamma_n^2\delta_m^2 + \nu\kappa^4)}{(\gamma_n^2 + q_{3m}^2)(\gamma_n^2 + q_{4m}^2)} x_n^{1j} + \\
 &\quad + \frac{4\kappa^2((1-\nu)^2\gamma_j^2\delta_m^2 + \nu\kappa^4)}{(\gamma_j^2 + q_{3m}^2)(\gamma_j^2 + q_{4m}^2)}, \\
 m > N_r, \quad j &= 1, 2, \dots, N_r,
 \end{aligned} \tag{26}$$

а при первых  $y_m^a$  –

$$\begin{aligned}
 x_m^{2j} \Delta_a(\gamma_m, b) &= \\
 &= \sum_{n=N_r+1}^{\infty} \frac{4\kappa^2((1-\nu)^2\gamma_m^2\delta_n^2 + \nu\kappa^4)}{(\delta_n^2 + p_{3m}^2)(\delta_n^2 + p_{4m}^2)} y_n^{2j} + \\
 &\quad + \frac{4\kappa^2((1-\nu)^2\gamma_m^2\delta_j^2 + \nu\kappa^4)}{(\delta_j^2 + p_{3m}^2)(\delta_j^2 + p_{4m}^2)}, \\
 y_m^{2j} \Delta_a(\delta_m, a) &= \\
 &= \sum_{n=N_r+1}^{\infty} \frac{4\kappa^2((1-\nu)^2\gamma_n^2\delta_m^2 + \nu\kappa^4)}{(\gamma_n^2 + q_{3m}^2)(\gamma_n^2 + q_{4m}^2)} x_n^{2j}. \\
 m > N_r; \quad j &= 1, 2, \dots, N_r,
 \end{aligned} \tag{27}$$

Полученные бесконечные системы (26) и (27) обладают важным свойством – единственное ограниченное решение каждой из них имеет известный степенной характер убывания. Это позволяет на основе метода улучшенной редукции получить численные значения всех неизвестных.

Действительно, проведя замену переменных

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_m^{ij} \gamma_m^{2+\lambda} &= X_m^{ij}, \quad \tilde{y}_m^{ij} \delta_m^{2+\lambda} = Y_m^{ij}, \\
 i &= 1, 2; \quad j = 1, 2, \dots, N_r,
 \end{aligned} \tag{28}$$

где степень замены  $\lambda$  выбирается как действительный корень уравнения

$$(1-\nu)(1-\lambda) = (3+\nu) \cos \frac{\pi\lambda}{2}, \tag{29}$$

можно показать, что для единственного ограниченного решения выполняются условия обобщенного закона асимптотических выражений Б. М. Кояловича и справедлива теорема, аналогичная известному признаку Кояловича [30].

Для регулярной парной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 x_m &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} y_n + P_m, \\
 y_m &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} x_n + Q_m,
 \end{aligned} \quad m = 1, 2, \dots$$

существует ограниченное главное решение, если ее коэффициенты неотрицательны и найдутся последовательности  $\{r_n\}$ ,  $\{\rho_n\}$ ,  $\{q_m\}$ ,  $\{\xi_m\}$  и числа  $L \geq l > 0$  такие, что при  $m > n$  коэффициенты бесконечной системы допускают оценки

$$\begin{aligned}
 lr_n &\leq a_{mn} q_m \leq Lr_n, \\
 l\rho_n &\leq b_{mn} \xi_m \leq L\rho_n,
 \end{aligned}$$

причем последовательности  $\{q_m\}$ ,  $\{\xi_m\}$  таковы что

$$\begin{aligned}
 q_m P_m &\leq K, \quad \xi_m Q_m \leq K, \\
 q_m \varphi_m &\leq K, \quad \xi_m \psi_m \leq K,
 \end{aligned}$$

$$\varphi_m = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}; \quad \psi_m = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}; \quad K = \text{const} > 0,$$

а последовательности  $\{r_n\}$ ,  $\{\rho_n\}$  обладают свойствами

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N r_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \rho_n = \infty,$$

$$r_{N+1} = o\left(\sum_{n=1}^N r_n\right), \quad \rho_{N+1} = o\left(\sum_{n=1}^N \rho_n\right),$$

Если это решение является единственным ограниченным решением и дополнительно выполняется условие

$$\frac{\sum_{n=1}^{m-1} \rho_n}{\sum_{n=1}^{m-1} r_n} = O\left(\frac{\inf_{n \geq m} \xi_n}{q_m}\right), \quad m \rightarrow \infty,$$

то существует положительный предел решения

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = G. \tag{30}$$

Предлагаемое достаточное условие отличается от признака Коляловича [30] наличием последовательностей  $\{r_n\}$ ,  $\{\rho_n\}$ , которые в его исходной формулировке полагались тождественно равными единице. Заметим, что без данных последовательностей было бы невозможно определить степенной характер убывания неизвестных в соотношениях (26), (27). Идеино доказательство сформулированной теоремы полностью аналогично доказательству Б. М. Кояловича, поэтому здесь оно не приводится.

Бесконечные системы (26), (27) после замены (28) удовлетворяют условиям нашей теоремы. Тогда асимптотическое поведение решения данных систем имеет вид

$$x_m^{ij} = G^{ij} \gamma_m^{-2-\lambda}, \quad y_m^{ij} = G^{ij} \delta_m^{-2-\lambda}, \quad m \rightarrow \infty, \quad (31)$$

что позволяет применить к их численному решению метод улучшенной редукции при удержании первых  $N$  уравнений и неизвестных. Этот подход обеспечивает высокую точность вычисления коэффициентов конечной системы (24), определитель которой на собственных частотах обращается в нуль.

Например, в случае рассмотренной выше первой собственной частоты квадратной пластинки  $\kappa_1 = 1.8785$  можно найти, что  $N_r = 1$ . Решения систем (26), (27) при  $N = 30$  позволяют получить конечную систему (24) в виде

$$\begin{cases} 0.99748x_1^a - 0.99749y_1^a = 0, \\ -0.99749x_1^a + 0.99748y_1^a = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Конечно, из-за небольших погрешностей в вычислениях как собственной частоты, так и решений систем (26), (27), определитель данной системы оказывается равным  $10^{-5}$ , однако с увеличением точности вычислений его значение можно сделать сколь угодно малым. Поэтому для определения нетривиального решения исследуемой бесконечной системы (17) отбрасываем одно из уравнений (32) и строим базисное решение для оставшегося уравнения:  $x_1^a = 1$ ,  $y_1^a = 1.00001$  – очевидно, значение  $y_1^a$  содержит погрешность такого же порядка, как и коэффициенты (32). Остается по формулам (25) восстановить однородное решение (17), которое представлено в табл. 2.

Полученные результаты практически без изменений переносятся и на другие типы симметрии колебаний пластинки. Формулы (12)–(14) дают аналитические представления для собственных форм колебаний. Для случая симметрии по обеим

Табл. 2. Нетривиальное решение системы (17) для  $a=b=1$ ,  $\nu=0.225$

$n$	$x_n^a, y_n^a$
1	1.00000
2	0.02182
3	0.00548
4	0.00219
5	0.00110
10	0.00014
$n \rightarrow \infty$	$1.48\alpha_n^{-2.727}$

Табл. 3. Точность выполнения однородного граничного условия  $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$  при  $x = \pm a$

$y$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
0	$7.4 \cdot 10^{-8}$	$7.1 \cdot 10^{-8}$	$8.5 \cdot 10^{-7}$
0.2	$7.4 \cdot 10^{-8}$	$7.1 \cdot 10^{-8}$	$8.5 \cdot 10^{-7}$
0.4	$7.5 \cdot 10^{-8}$	$7.2 \cdot 10^{-8}$	$8.5 \cdot 10^{-7}$
0.6	$7.7 \cdot 10^{-8}$	$7.5 \cdot 10^{-8}$	$8.4 \cdot 10^{-7}$
0.8	$9.1 \cdot 10^{-8}$	$8.8 \cdot 10^{-8}$	$8.2 \cdot 10^{-7}$
1.0	-0.00011	0.0067	-0.003

осям точность выполнения однородных граничных условий для первых трех нормированных к максимальному значению собственных форм продемонстрирована в табл. 3. Видно, что наибольшая погрешность достигается в углу пластинки, но и она достаточно мала при относительно небольшом порядке конечных систем в методе улучшенной редукции.

#### 4. СРАВНЕНИЕ С РЕШЕНИЕМ РИТЦА И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

После отработки описанного алгоритма на тестовых примерах были проведены вычисления для квадратной пластинки при значениях коэффициента Пуассона  $\nu = 0.225$  (стекло) и 0.33 (алюминий). В работе [14] на основе оптического метода голографической интерферометрии (AF-ESPI), экспериментально исследовались собственные частоты и фигуры Хладни алюминиевой пластинки размером  $80 \times 80 \times 1$  мм. В табл. 4 дано сравнение первых пяти собственных частот, полученных тремя способами: экспериментально (AF-ESPI), на основе метода конечных элементов (FEM) [14] и согласно нашему алгоритму (Т). Представленные

Табл. 4. Сравнение вычисленных собственных частот с экспериментом (Гц)

$n$	1	2	3	4	5
AF-ESPI	494	735	890	1271	2330
FEM	510	745	945	1324	2357
T	505	738	935	1314	2335

данные показывают хорошее соответствие между результатами численного моделирования и экспериментально найденными собственными частотами.

Отметим, что Ритц [3] разделил все собственные формы на простые тона, для которых основной член задается в виде  $u_n v_m \pm u_m v_n$  (случаи симметрии “S” и “A”), и двойные тона, для которых собственная форма описывается линейной комбинацией  $C_1 u_n v_m + C_2 u_m v_n$  (случаи симметрии “SA” и “AS”). Для двойных тонов линейно-независимые решения выбираются в форме  $W_1 = u_n v_m$  и  $W_2 = u_n v_m - u_m v_n$ . Следуя данному подходу, для двойных тонов, где собственные формы представляются в общем случае формулой

$$W = C_1 W_{SA}(x, y) + C_2 W_{SA}(y, x), \quad (33)$$

два линейно-независимых решения также выбираем в виде

$$\begin{aligned} W_1 &= W_{SA}(x, y), \\ W_2 &= W_{SA}(x, y) - W_{SA}(y, x). \end{aligned} \quad (34)$$

Заметим, что для некоторых фигур Хладни формулы (34) дают зеркально отображенную фигуру. В этих случаях, чтобы получить полное соответствие с экспериментом, линейно-независимые решения следует выбрать в форме

$$\begin{aligned} W_1 &= W_{SA}(y, x), \\ W_2 &= W_{SA}(x, y) + W_{SA}(y, x). \end{aligned}$$

В табл. 5 представлены первые собственные значения и фигуры Хладни для стеклянной квадратной пластинки, найденные по нашему алгоритму в сравнении с результатами Ритца и экспериментальными данными [14]. Значения собственных частот у Ритца даются с небольшой погрешностью, которая возрастает с увеличением частоты, из-за этого некоторые частоты оказываются переставленными местами (5-я и 6-я, 22-я и 23-я, а также 25-я и 26-я). Интересно, что некоторые узловые линии, которые по приближенному решению

методом Ритца выглядят как прямые, в действительности таковыми не являются.

Табл. 6 дает сравнение наших результатов с книгой [12], в которой можно найти фигуры, не представленные в предыдущей таблице.

Из табл. 5 и 6 можно сделать вывод о том, что для двойных тонов вид фигуры Хладни зависит от условий эксперимента. В некоторых случаях наблюдается моды  $W_{SA}(x, y)$  (моды 4, 9, 16, 19, 20), и  $W_{SA}(x, y) - W_{SA}(y, x)$  (моды 4, 9), а в других –  $W_{SA}(y, x)$  (моды 5, 12) и  $W_{SA}(x, y) + W_{SA}(y, x)$  (моды 5, 12, 16, 19, 26). Очевидно, основную роль здесь играет вид возбуждающей колебания нагрузки.

Из таблиц также следует, что фигуры Хладни, кажущиеся в приближенном решении пересечениями вертикальных и горизонтальных линий, (см., например, моды 6, 12, 13, 16, 20, 21 из табл. 5 и моды 5, 6, 9 из табл. 6), в действительности имеют более сложную структуру.

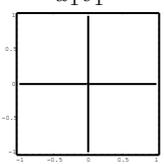
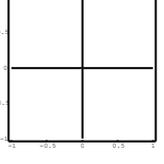
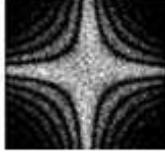
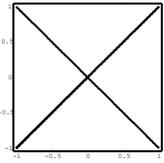
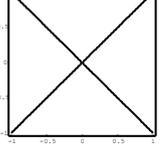
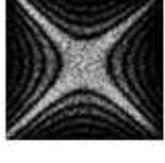
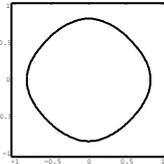
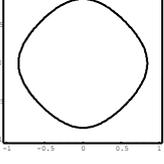
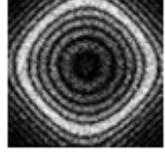
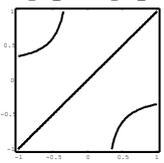
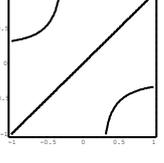
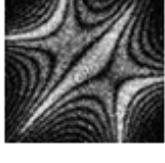
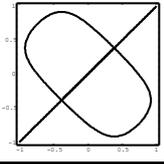
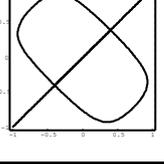
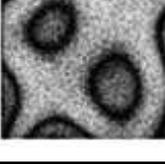
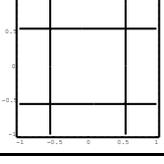
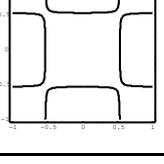
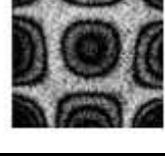
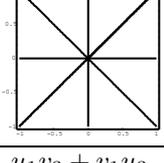
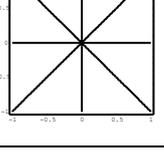
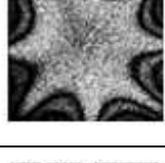
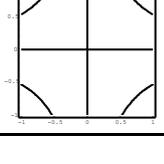
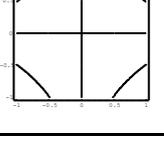
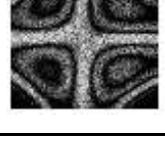
## ВЫВОДЫ

Представленный новый алгоритм [32] позволил с высокой точностью определить собственные частоты колебаний пластинки и построить фигуры Хладни. Впервые получено явное аналитическое представление для собственных форм колебаний пластинки. В отличие от использовавшихся ранее подходов, для собственных частот построена двойная оценка, которая дала возможность указать величину погрешности в полученных значениях собственных частот. Соответствие результатов численного моделирования и экспериментальных данных свидетельствует об эффективности предложенного подхода.

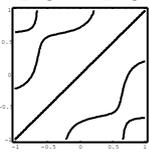
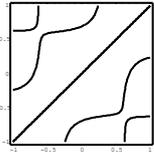
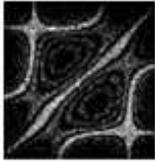
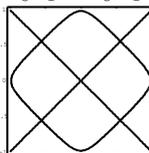
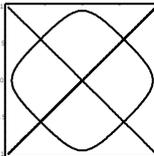
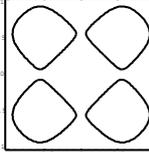
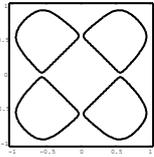
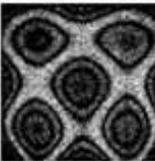
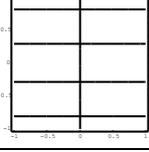
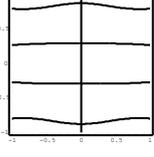
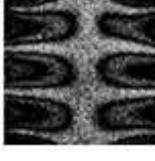
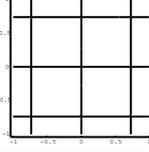
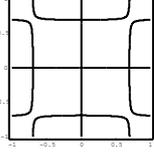
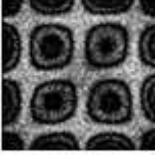
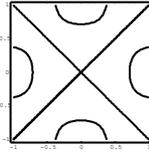
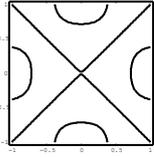
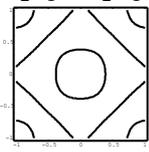
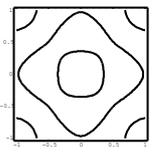
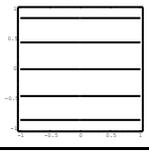
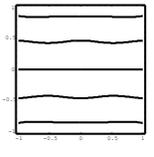
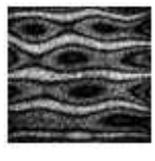
На основе полученного точного решения задачи о собственных частотах и формах колебаний пластинки со свободными краями проведено сравнение с решением Ритца, позволившее сделать следующие выводы.

1. Подтверждено блестящее предположение Ритца о том, что собственные формы пластинки могут быть описаны в виде комбинаций собственных функций стресса.
2. С увеличением частоты колебаний (и порядкового номера собственной формы) точность приближения падает, из-за чего у Ритца взаимное расположение некоторых соседних форм оказалось перепутанным.
3. В ряде фигур Хладни для приближенного решения имеются прямые линии, хотя экспери-

Табл. 5. Фигуры Хладни для квадратной пластины,  $\nu = 0.225$ 

$n$	$\kappa_n$	$\lambda_n = \kappa_n^4$	$\lambda_n^{\text{Ritz}}$	Согласно [3]	Фигура Хладни	Эксперимент [14]
1A	1.878	12.454	12.43	$u_1 v_1$ 		
2S	2.257	25.949	26.40	$u_0 v_2 - v_0 u_2$ 		
3S	2.443	35.620	35.73	$u_0 v_2 + v_0 u_2$ 		
4SA	2.999	80.895	80.8	$u_1 v_2 - v_1 u_2$ 		
5SA	3.916	235.38	237.1	$u_0 v_3 - v_0 u_3$ 		
6S	4.051	269.31	226	$u_2 v_2$ 		
7A	4.231	320.67	316.1	$u_1 v_3 - v_1 u_3$ 		
8A	4.401	375.22	378	$u_1 v_3 + v_1 u_3$ 		

Продолжение табл. 5

$n$	$\kappa_n$	$\lambda_n = \kappa_n^4$	$\lambda_n^{\text{Ritz}}$	Согласно [3]	Фигура Хладни	Эксперимент [14]
9SA	5.198	730.12	746	$u_2v_3 - v_2u_3$ 		
10S	5.441	876.42	886	$u_0v_4 - v_0u_4$ 		
11S	5.528	933.84	941	$u_0v_4 + v_0u_4$ 		
12SA	5.763	1103.38	1131	$u_1v_4$ 		
13A	6.250	1525.88	1554	$u_3v_3$ 		
14S	6.422	1700.91	1702	$u_2v_4 - v_2u_4$ 		
15S	6.525	1812.68	2020	$u_2v_4 + v_2u_4$ 		
16SA	7.055	2476.9	2500	$u_0v_5$ 		

Окончание табл. 5

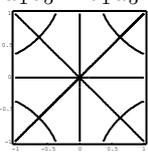
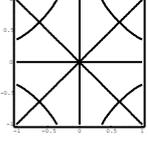
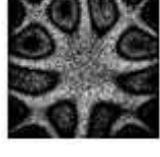
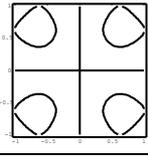
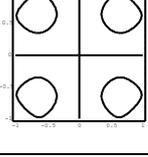
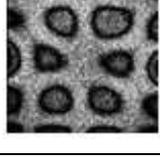
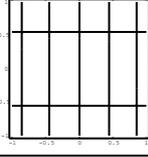
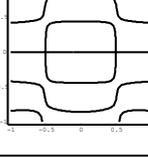
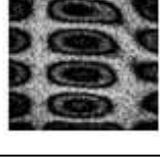
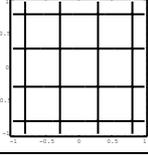
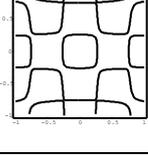
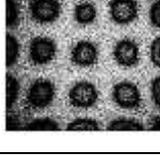
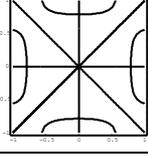
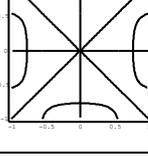
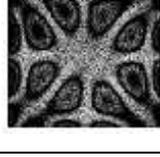
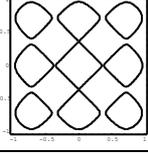
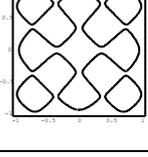
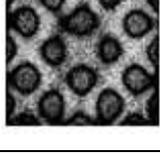
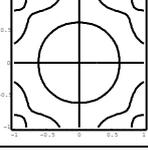
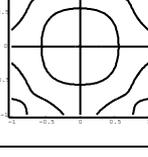
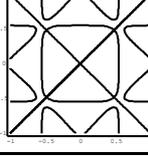
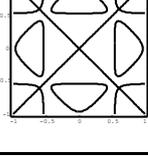
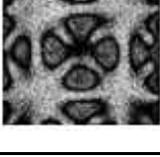
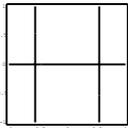
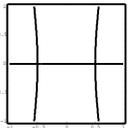
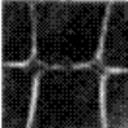
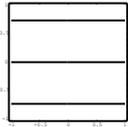
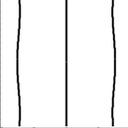
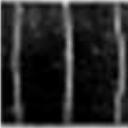
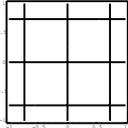
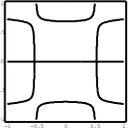
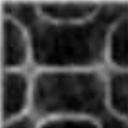
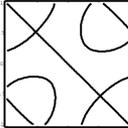
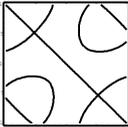
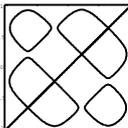
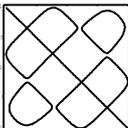
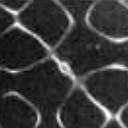
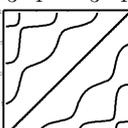
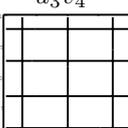
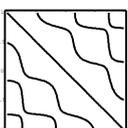
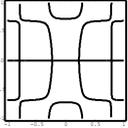
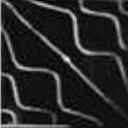
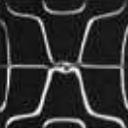
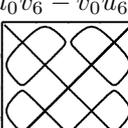
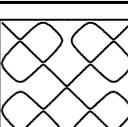
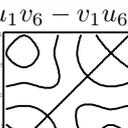
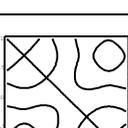
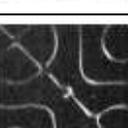
$n$	$\kappa_n$	$\lambda_n = \kappa_n^4$	$\lambda_n^{\text{Ritz}}$	Согласно [3]	Фигура Хладни	Эксперимент [14]
17A	7.198	2684.4	2713	$u_1 v_5 - v_1 u_5$ 		
18A	7.319	2870.6	2945	$u_1 v_5 + v_1 u_5$ 		
20SA	7.838	3774.1	3927	$u_5 v_2$ 		
21S	8.456	5112.8	5480	$u_4 v_4$ 		
23A	8.613	5503.1	5570	$u_3 v_5 - v_3 u_5$ 		
24S	8.658	5619.1	5640	$u_0 v_6 + v_0 u_6$ 		
25A	8.688	5698.5	6303	$u_3 v_5 + v_3 u_5$ 		
27S	9.223	7235.8	7310	$u_2 v_6 - v_2 u_6$ 		

Табл. 6. Фигуры Хладни для квадратной пластины в сравнении [12],  $\nu=0.225$

$n$	$\kappa_n$	Согласно [3]	Фигура Хладни	Эксперимент [12]
4SA	2.999	$u_1v_3$ 		
5SA	3.916	$u_0v_3$ 		
9SA	5.198	$u_2v_3$ 		
12SA	5.763	$u_1v_4 - v_1u_4$ 		
16SA	7.055	$u_0v_5 - v_0u_5$ 		
19SA	7.403	$u_3v_4 - v_3u_4$  $u_3v_4$ 	 	 
22S	8.596	$u_0v_6 - v_0u_6$ 		
26SA	8.786	$u_1v_6 - v_1u_6$ 		

менты дают некоторое их искривление. Сам Ритц объяснял этот факт погрешностью эксперимента. Точное решение задачи показывает, что кривизна действительно должна наблюдаться.

Благодаря представлению результатов с оценкой точности, которую можно сделать сколь угодно высокой, авторы выражают надежду, что данное исследование наконец закроет проблему аналитического построения фигур Хладни.

Заметим, что аналогичным способом можно рассмотреть и другие виды граничных условий на сторонах пластинки. Кажущаяся громоздкость получаемых при этом формул оправдывается точностью результатов и эффективной численной реализацией решения задачи о свободных колебаниях прямоугольной пластинки.

1. *Chladni E.-F.-F.* Traité d'acoustique.– Paris: Courcier, 1809.– 375 p.
2. *Chladni E. F. F.* Die Akustik.– Leipzig: Breitkopf und Härtel, 1802.– 242 s.
3. *Ritz W.* Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern // *Ann. Physik.*– 1909.– 4 Folge, **28**.– S. 737–786.
4. *Chladni E. F. F.* Neue Beiträge zur Akustik.– Leipzig: Breitkopf und Härtel, 1817.– 90 s.
5. *Stöckmann H.-J.* Chladni meets Napoleon // *Eur. Phys. J. Special Topics.*– 2007.– **145**.– P. 15–23.
6. *Ullmann D.* Life and work of E. F. F. Chladni // *Eur. Phys. J. Special Topics.*– 2007.– **145**.– P. 25–32.
7. *Bucciarelli L., Dworsky N.* Sophie Germain: An essay in the history of the theory of elasticity.– Dordrecht: Reidel, 1980.– 147 p.
8. *Tyndall J.* Sound: A course of eight lectures delivered at the Royal Institution of Great Britain.– London: Longmans, Green, and Co, 1867.– 341 p.
9. *Тиндаль Д.* Звук (3-е изд).– М.: Госиздат, 1922.– 327 с.
10. *Waller M. D.* Chladni figures: A study in symmetry.– London: Bell, 1961.– 163 p.
11. *Wheatstone C.* On the figures obtained by strewing sand on vibrating surfaces, commonly called acoustical figures // *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*– 1833.– **123**.– P. 593–633.
12. *Waller M. D.* Vibration of free square plates: Part I. Normal vibrating modes // *Proc. Phys. Soc Lond.*– 1939.– **B51**.– P. 831–844.
13. *Waller M. D.* Vibration of free rectangular plates // *Proc. Phys. Soc. Lond.*– 1949.– **B62**.– P. 277–285.
14. *Ma C.-C., Huang C.-H.* Experimental whole-field interferometry for transverse vibration of plates // *J. Sound Vib.*– 2004.– **271**.– P. 493–506.
15. *Nieves F. J., Gascón, Bayón A.* Natural frequencies and mode shapes of flexural vibration of plates: Laser-interferometry detection and solutions by Ritz's method // *J. Sound Vib.*– 2004.– **278**.– P. 637–655.
16. *Lord Rayleigh* On the nodal lines of a square plate // *Phil. Mag.*– 1873.– Ser. 4, **46**.– P. 166–171, 246–247.
17. *Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей)* Теория звука. Том 2.– М.: Гостехтеориздат, 1955.– 504 с.
18. *Lord Rayleigh* On the calculation of Chladni's figures for a square plate // *Phil. Mag.*– 1911.– Ser. 6, **22**.– P. 225–229.
19. *Leissa A. W.* The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods // *J. Sound Vib.*– 2005.– **287**.– P. 961–978.
20. *Panko S.* Comments on the historical bases of the Rayleigh and Ritz methods // *J. Sound Vib.*– 2009.– **319**.– P. 731–733.
21. *Leissa A. W.* Reply to the comments of Sinniah Panko // *J. Sound Vib.*– 2009.– **319**.– P. 1330.
22. *Leissa A. W.* The free vibration of rectangular plates // *J. Sound Vib.*– 1973.– **31**.– P. 257–293.
23. *Lemke A.* Experimentelle Untersuchungen zur W. Ritzschen Theorie der Transversalschwingungen quadratischer Platten // *Ann. Physik.*– 1909.– 4 Folge, **86**.– S. 717–750.
24. *Iguchi S.* Die Eigenschwingungen mit Klangfiguren der freien rechteckigen Platte // *Ing.-Archiv.*– 1953.– **21**.– S. 304–322.
25. *Gorman D. J.* Free vibration analysis of the completely free rectangular plate by the method of superposition // *J. Sound Vib.*– 1978.– **57**.– P. 437–447.
26. *Gorman D. J.* Free vibration analysis of rectangular plates.– Amsterdam: Elsevier-NorthHolland, 1982.– 324 p.
27. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наукова думка, 1981.– 284 с.
28. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа.– М.-Л.: Гостехиздат, 1952.– 695 с.
29. *Папков С. О., Чехов В. Н.* О локализации собственных частот прямоугольной призмы посредством исключения неизвестных в квазирегулярной бесконечной системе // *Доп. НАН України.*– 2004.– N 10.– С. 57–62.
30. *Коялович Б. М.* Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // *Изв. физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова.*– 1930.– **3**, вып. 2.– С. 41–167.
31. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Том 1. Элементарные функции.– М.: Наука, 1981.– 800 с.
32. *Папков С. О.* Установившиеся вынужденные колебания призмы при заданных на границе смещениях // *Акуст. вісн.*– 2008.– **11**, N 4.– С. 36–43.
33. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.– М.: Наука, 1984.– 752 с.

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

**Случай симметрии “S”**

$$z_m^s = \sum_{n=1}^{\infty} M_{m,n}^s z_n^s \quad (m = 1, 2, \dots), \quad \text{где} \quad z_1^s = y_0^s; \quad z_2^s = x_0^s; \quad z_{2m-1}^s = y_m^s; \quad z_{2m}^s = x_m^s;$$

$$M_{1,1}^s = 0; \quad M_{1,2}^s = -\frac{b\kappa(\text{ctg } \kappa b + \text{cth } \kappa b)}{2\nu}; \quad M_{1,2n-1}^s = \frac{\kappa^6}{q_{1n}^2 q_{2n}^2}; \quad M_{1,2n}^s = 0;$$

$$M_{2,1}^s = -\frac{a\kappa(\text{ctg } \kappa a + \text{cth } \kappa a)}{2\nu}; \quad M_{2,2}^s = 0; \quad M_{2,2n-1}^s = 0; \quad M_{2,2n}^s = \frac{\kappa^6}{p_{1n}^2 p_{2n}^2};$$

$$M_{2m-1,1}^s = 0; \quad M_{2m-1,2}^s = \frac{4\nu\kappa^4}{\Delta_s(\beta_m, a)q_{1m}^2 q_{2m}^2}; \quad M_{2m-1,2n-1}^s = 0;$$

$$M_{2m-1,2n}^s = \frac{4\kappa^2((1-\nu)^2\alpha_n^2\beta_m^2 + \nu\kappa^4)}{\Delta_s(\beta_m, a)(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)}; \quad M_{2m,1}^s = \frac{4\nu\kappa^4}{\Delta_s(\alpha_m, b)p_{1m}^2 p_{2m}^2};$$

$$M_{2m,2}^s = 0; \quad M_{2m,2n-1}^s = \frac{4\kappa^2((1-\nu)^2\alpha_m^2\beta_n^2 + \nu\kappa^4)}{\Delta_s(\alpha_m, b)(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)}; \quad M_{2m,2n}^s = 0.$$

Ряды из условий регулярности для системы (15),  $S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |M_{m,n}^s|$ :

$$S_1 = \frac{b\kappa}{2\nu} |\text{ctg } \kappa b + \text{cth } \kappa b| + \frac{\kappa^2}{2} + \kappa^6 \sum_{n=1}^{N_1} \frac{1}{q_{2n}^2} \left( \frac{1}{|q_{1n}^2|} - \frac{1}{q_{1n}^2} \right) - \frac{\kappa^3 b}{4} (\text{ctg } \kappa b + \text{cth } \kappa b), \quad \text{где} \quad N_1 = \left[ \frac{\kappa b}{\pi} \right] + 1;$$

$$S_2 = \frac{a\kappa}{2\nu} |\text{ctg } \kappa a + \text{cth } \kappa a| + \frac{\kappa^2}{2} + \kappa^6 \sum_{n=1}^{N_2} \frac{1}{p_{2n}^2} \left( \frac{1}{|p_{1n}^2|} - \frac{1}{p_{1n}^2} \right) - \frac{\kappa^3 a}{4} (\text{ctg } \kappa a + \text{cth } \kappa a) \quad \text{где} \quad N_2 = \left[ \frac{\kappa a}{\pi} \right] + 1;$$

$$S_{2m-1} = \frac{1}{|\Delta_s(\beta_m, a)|} \left( 4\kappa^2 \sum_{n=1}^{N_3} \frac{(1-\nu)^2\alpha_n^2\beta_m^2 + \nu\kappa^4}{(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)} \left( \frac{1}{|\alpha_n^2 + q_{1m}^2|} - \frac{1}{\alpha_n^2 + q_{1m}^2} \right) + \right. \\ \left. + (\kappa^4\nu - (1-\nu)^2 q_{1m}^2 \beta_m^2) \left( \frac{a}{q_{1m}} \text{cth } q_{1m} a - \frac{1}{q_{1m}^2} \right) - (\kappa^4\nu - (1-\nu)^2 q_{2m}^2 \beta_m^2) \left( \frac{a}{q_{2m}} \text{cth } q_{2m} a - \frac{1}{q_{2m}^2} \right) + \frac{4\nu\kappa^4}{|q_{1m}^2 q_{2m}^2|} \right);$$

$$S_{2m} = \frac{1}{|\Delta_s(\alpha_m, b)|} \left( 4\kappa^2 \sum_{n=1}^{N_3} \frac{(1-\nu)^2\alpha_m^2\beta_n^2 + \nu\kappa^4}{(\beta_n^2 + p_{2m}^2)} \left( \frac{1}{|\beta_n^2 + p_{1m}^2|} - \frac{1}{\beta_n^2 + p_{1m}^2} \right) + \right. \\ \left. + (\kappa^4\nu - (1-\nu)^2 p_{1m}^2 \alpha_m^2) \left( \frac{b}{p_{1m}} \text{cth } p_{1m} b - \frac{1}{p_{1m}^2} \right) - (\kappa^4\nu - (1-\nu)^2 p_{2m}^2 \alpha_m^2) \left( \frac{b}{p_{2m}} \text{cth } p_{2m} b - \frac{1}{p_{2m}^2} \right) + \frac{4\nu\kappa^4}{|p_{1m}^2 p_{2m}^2|} \right),$$

$$\text{где} \quad N_3 = \left[ \sqrt{\max \left( 0, \left( \frac{a\kappa}{\pi} \right)^2 - \left( \frac{a}{b} \right)^2, \left( \frac{b\kappa}{\pi} \right)^2 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right)} \right] + 1.$$

**Случай симметрии “SA”**

$$z_m^{sa} = \sum_{n=1}^{\infty} M_{m,n}^{sa} z_n^{sa} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad \text{где} \quad z_1^{sa} = x_0^a; \quad z_{2m}^{sa} = x_m^s; \quad z_{2m+1}^{sa} = y_m^s;$$

$$M_{1,1}^{sa} = 0; \quad M_{1,2n}^{sa} = 0; \quad M_{1,2n+1}^{sa} = \frac{2\nu\kappa^6}{b(\text{th } \kappa b - \text{tg } \kappa b)q_{3n}^2 q_{4n}^2}; \quad M_{2m,1}^{sa} = 0; \quad M_{2m,2n}^{sa} = 0;$$

$$M_{2m,2n+1}^{sa} = \frac{4\kappa^4((1-\nu)^2\alpha_m^2\delta_n^2 + \nu\kappa^4)}{\Delta_s(\alpha_m, b)(\delta_n^2 + p_{1m}^2)(\delta_n^2 + p_{2m}^2)}; \quad M_{2m+1,1}^{sa} = \frac{4\nu\kappa^3}{\Delta_a(\delta_m, a)q_{3m}^2q_{4m}^2};$$

$$M_{2m+1,2n}^{sa} = \frac{4\kappa^4((1-\nu)^2\alpha_n^2\delta_m^2 + \nu\kappa^4)}{\Delta_s(\delta_m, a)(\alpha_n^2 + q_{3m}^2)(\alpha_n^2 + q_{4m}^2)}; \quad M_{2m+1,2n+1}^{sa} = 0;$$

Ряды из условий регулярности для системы (16),  $S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}^s a|$ :

$$S_1 = \frac{\nu\kappa^3}{2} \frac{\operatorname{tg} \kappa b - \operatorname{th} \kappa b}{|\operatorname{tg} \kappa b - \operatorname{th} \kappa b|} + \frac{2\nu\kappa^6}{|\operatorname{tg} \kappa b - \operatorname{th} \kappa b|} \sum_{n=1}^{N_4} \frac{1}{q_{2n}^2} \left( \frac{1}{|q_{1n}^2|} - \frac{1}{q_{1n}^2} \right);$$

$$S_{2m} = \frac{1}{|\Delta_a(\alpha_m, a)|} \left( 4\kappa^2 \sum_{n=1}^{N_5} \frac{(1-\nu)^2\alpha_m^2\delta_n^2 + \nu\kappa^4}{(\delta_n^2 + p_{2m}^2)} \left( \frac{1}{|\delta_n^2 + p_{1m}^2|} - \frac{1}{\delta_n^2 + p_{1m}^2} \right) + \right. \\ \left. + (\kappa^4\nu - (1-\nu)^2p_{1m}^2\alpha_m^2) \frac{b \operatorname{th} p_{1m} b}{p_{1m}} - (\kappa^4\nu - (1-\nu)^2p_{2m}^2\alpha_m^2) \frac{b \operatorname{th} p_{2m} b}{p_{2m}} \right);$$

$$S_{2m+1} = \frac{1}{|\Delta_s(\delta_m, a)|} \left( 4\kappa^2 \sum_{n=1}^{N_6} \frac{(1-\nu)^2\alpha_n^2\delta_m^2 + \nu\kappa^4}{(\alpha_n^2 + q_{4m}^2)} \left( \frac{1}{|\alpha_n^2 + q_{3m}^2|} - \frac{1}{\alpha_n^2 + q_{3m}^2} \right) + \right. \\ \left. + (\kappa^4\nu - (1-\nu)^2q_{3m}^2\delta_m^2) \left( \frac{a}{q_{3m}} \operatorname{cth} q_{3m} a - \frac{1}{q_{3m}^2} \right) - (\kappa^4\nu - (1-\nu)^2q_{4m}^2\delta_m^2) \left( \frac{a}{q_{4m}} \operatorname{cth} q_{4m} a - \frac{1}{q_{4m}^2} \right) + \frac{4\nu\kappa^4}{|q_{3m}^2|q_{4m}^2} \right),$$

$$\text{где } N_4 = \left[ \frac{\kappa b}{\pi} + \frac{1}{2} \right] + 1; \quad N_5 = \left[ \sqrt{\max \left( 0, \left( \frac{b\kappa}{\pi} \right)^2 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right) + \frac{1}{2}} \right] + 1; \quad N_6 = \left[ \sqrt{\max \left( 0, \left( \frac{a\kappa}{\pi} \right)^2 - \left( \frac{a}{2b} \right)^2 \right)} \right] + 1.$$

**Случай симметрии “А”**

$$z_m^a = \sum_{n=1}^{\infty} M_{m,n}^a z_n^a, \quad (m = 1, 2, \dots), \quad \text{где } z_{2m-1}^a = x_m^a; \quad z_{2m}^a = y_m^a;$$

$$M_{2m-1,2n-1}^a = 0; \quad M_{2m-1,2n}^a = \frac{4\kappa^4((1-\nu)^2\gamma_m^2\delta_n^2 + \nu\kappa^4)}{\Delta_a(\gamma_m, b)(\delta_n^2 + p_{3m}^2)(\delta_n^2 + p_{4m}^2)};$$

$$M_{2m,2n-1}^a = \frac{4\kappa^4((1-\nu)^2\gamma_n^2\delta_m^2 + \nu\kappa^4)}{\Delta_a(\delta_m, a)(\gamma_n^2 + q_{3m}^2)(\gamma_n^2 + q_{4m}^2)}; \quad M_{2m,2n}^a = 0;$$

Ряды из условий регулярности для системы (17),  $S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}^a|$ :

$$S_{2m-1} = \frac{1}{|\Delta_a(\gamma_m, b)|} \left( 4\kappa^2 \sum_{n=1}^{N_7} \frac{(1-\nu)^2\gamma_m^2\delta_n^2 + \nu\kappa^4}{(\delta_n^2 + p_{4m}^2)} \left( \frac{1}{|\delta_n^2 + p_{3m}^2|} - \frac{1}{\delta_n^2 + p_{3m}^2} \right) + \right. \\ \left. + (\kappa^4\nu - (1-\nu)^2p_{3m}^2\gamma_m^2) \frac{b \operatorname{th} p_{3m} b}{p_{3m}} - (\kappa^4\nu - (1-\nu)^2p_{4m}^2\gamma_m^2) \frac{b \operatorname{th} p_{4m} b}{p_{4m}} \right);$$

$$S_{2m} = \frac{1}{|\Delta_a(\delta_m, a)|} \left( 4\kappa^2 \sum_{n=1}^{N_7} \frac{(1-\nu)^2\gamma_n^2\delta_m^2 + \nu\kappa^4}{(\gamma_n^2 + q_{4m}^2)} \left( \frac{1}{|\gamma_n^2 + q_{3m}^2|} - \frac{1}{\gamma_n^2 + q_{3m}^2} \right) + \right. \\ \left. + (\kappa^4\nu - (1-\nu)^2q_{3m}^2\delta_m^2) \frac{a \operatorname{th} q_{3m} a}{q_{3m}} - (\kappa^4\nu - (1-\nu)^2q_{4m}^2\delta_m^2) \frac{a \operatorname{th} q_{4m} a}{q_{4m}} \right),$$

$$\text{где } N_7 = \left[ \sqrt{\max \left( 0, \left( \frac{a\kappa}{\pi} \right)^2 - \left( \frac{a}{2b} \right)^2, \left( \frac{b\kappa}{\pi} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 \right) + \frac{1}{2}} \right] + 1.$$