1977 г. Март Том 121, вып. 3

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

[512.86+530.17]:583.3

КОВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА И СОПОСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М. А. Миллер, Ю. М. Сорокин, Н. С. Степанов

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Довольно распространено мнение, что преобразования Лоренца

$$x' = \gamma (x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma (t - Vc^{-2}x), \qquad (1.1)$$

где $\gamma = [1 - (V^2/c^2)]^{-1/2}$ выделены среди других преобразований координат и времени (например, классических преобразований Галилея) тем, что, в отличие от последних, они (и только они) оставляют инвариантными уравнения Максвелла. Хорошо известно, однако, что уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad &&\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \\ &\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, &&\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \qquad (1.2)$$

могут быть записаны в 4-тензорной форме без конкретизации связи между векторами полей в веществе [1-4]. А это означает не только их лоренц-инвариантность (что обычно подчеркивается в физической литературе), но также инвариантность относительно произвольных невырожденных линейных преобразований пространственно-временных переменных (аффинная ковариантность).

Иначе говоря, если вместе с координатами по соответствующему закону пересчитывать поля и источники (как это делается, в частности, и в специальной теории относительности (СТО)), уравнения (1.2) сохранят свой вид при любых линейных преобразованиях, включая и галилеевские. Разумеется, каждому такому преобразованию (т. е. каждой системе 4-координат) будут при этом соответствовать свои материальные уравнения среды.

С формальной точки зрения преобразования Лоренца выделены только тем, что в вакууме они сохраняют вид материальных уравнений среды

($\mathbf{D} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$), что физически и соответствует релятивистскому постулату инвариантности скорости света. Для полей в веществе преобразования Лоренца таким преимуществом уже не обладают и, как будет показано ниже, не являются поэтому оптимальными при решении ряда задач. Иными словами, группа инвариантных преобразований исходной системы уравнений (1.2) оказывается более широкой, чем группа симметрии получаемого из (1.2) волнового уравнения (оператора Даламбера) *).

Распространенное же в физической литературе утверждение об уникальности инвариантных свойств группы Лоренца далеко не всегда сопровождается четким указанием на то, имеются ли в виду поля именно в вакууме или в произвольной материальной среде (см., например, [1, 3, 6–8]) **).

Конечно, по физическому смыслу преобразования Лоренца принципиально отличаются от других линейных преобразований переменных, поскольку последние уже не соответствуют переходу из одной инерциальной системы отсчета в другую. Тем не менее, каждому инвариантному преобразованию формально соответствует определенный рецепт пересчета полей и материальных характеристик среды, что позволяет говорить *о сопоставлении* различных электродинамических систем. Преобразования Лоренца можно рассматривать как частный случай такого сопоставления, когда одна и та же физическая система описывается с точки зрения двух различных инерциальных наблюдателей.

В то время как релятивистские преобразования являются привычным методом решения многих электродинамических задач, другие инвариантные преобразования почти не находят применения. Однако существуют определенные классы задач, где нелоренцовские преобразования оказываются более удобными. Примером может служить вычисление полей в средах с движущимися неоднородностями или источниками [11–16].

Как известно, использование преобразования Лоренца от системы K, где среда неподвижна и описывается простейшими материальными уравнениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{1.3}$$

(ε, $\mu = \mathrm{const}$), к системе K', сопровождающей движущиеся со скоростью V неоднородности или источники, приводит к материальным соотношениям Минковского [2–4] ***)

$$\begin{aligned} \mathbf{D}' + c^{-1}[\mathbf{V}\mathbf{H}'] &= \varepsilon(\mathbf{E}' + c^{-1}[\mathbf{V}\mathbf{B}']), \\ \mathbf{B}' - c^{-1}[\mathbf{V}\mathbf{E}'] &= \mu(\mathbf{H}' - c^{-1}[\mathbf{V}\mathbf{D}']). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Использование же разумным образом выбранных нелоренцовских преобразований позволяет свести задачу к исследованию полей в средах с более простыми материальными уравнениями, чем (1.4), причем соответствующие формулы остаются пригодными и для сверхсветовых движений ($V > c$). Подобные системы физически вполне реализуемы и в последнее время привлекают значительный интерес (см., например, [13, 17]). Известным примером совсем другого рода может служить возможность сопоставления

*) Отметим в этой связи замечание Минковского [5], что лоренц-ковариантность уравнений электродинамики есть математический факт, существенно базирующийся «на форме дифференциального уравнения для распространения волн со скоростью света».

**) Возможно, возникновению указанного недоразумения способствовало то, что, сформулировав принцип ковариантности уравнений движения, Пуанкаре [9] ввел преобразования Лоренца именно как преобразования, не изменяющие уравнений электродинамики. Однако им [9] (как и в первых работах Эйнштейна по СТО [10]) рассматривался случай вакуума, и возможность пересчета материальных уравнений среды исключалась.

***) Здесь и далее величины, относящиеся к системе K', будем помечать штрихом.

влияния на электромагнитные поля однородного гравитационного поля и диэлектрической среды [4, 18].

В связи с этим представляется полезной предпринятая ниже попытка обсудить особенности нелоренцовских преобразований и проиллюстрировать применение метода сопоставления для решения некоторых задач.

2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В КОСОУГОЛЬНЫХ 4-КООРДИНАТАХ И ВВЕДЕНИЕ СОПОСТАВИМЫХ СИСТЕМ

Как известно, с геометрической точки зрения преобразования Лоренца представляют собой унитарные преобразования (вращения) в ортогональном (псевдоевклидовом) 4-пространстве. При этом метрический тензор g_{ik} пространства, определяющий в нем соответствующий линейный элемент *)

$$ds = \sqrt{g_{ik}\, dx^i\, dx^k},$$

остается неизменным («галилеевским»):

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

Мы же рассматриваем произвольные невырожденные линейные преобразования 4-координат вида

$$x'^i = \alpha^i_k x^k, \quad x^l = \tilde{\alpha}^l_n x'^n, \qquad (2.2)$$

так что $\alpha^i_k \tilde{\alpha}^k_n = \delta^i_n$, где δ^i_n — символ Кронекера, $\operatorname{Det} \alpha^i_k \neq 0$.

На языке общей теории относительности (ОТО) подобные преобразования означают введение неортогональных (косоугольных) 4-координатных систем, описываемых метрическим тензором с постоянными компонентами, отличными, однако, от (2.1). Закон преобразования ковариантных компонент **) g_{ik}, соответствующий (2.2), имеет вид

$$g'_{ik} = \tilde{\alpha}^m_i \tilde{\alpha}^l_k g_{ml}. \qquad (2.3)$$

При этом в ОТО, как известно, обеспечивается ковариантность уравнений (1.2) относительно произвольных преобразований координат; правда, обычно электродинамика ОТО формулируется лишь для вакуума, нас же интересуют поля в материальных средах. Однако обсуждаемая здесь задача сопоставления существенно отличается от решаемой с помощью известного аппарата ОТО. Дело в том, что в ОТО при переходе к другим независимым переменным x'^i однозначно преобразуется и метрика пространства — времени в соответствии с формулой (2.3). В нашем же случае вспомогательная система физически, вообще говоря, никак не связана с исходной, и метрический тензор для нее можно выбирать произвольно. Это обстоятельство расширяет класс сопоставимых систем и позволяет получить более простые и удобные при решении конкретных задач формулы преоб-

*) Здесь и далее греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3, латинские — 0, 1, 2, 3.

**) Чтобы подчеркнуть различие между ко- и контравариантными компонентами в косоугольных координатах, напомним их наглядные геометрические определения для векторов [19]:

$$\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}^i, \quad A^i = (\mathbf{A}\mathbf{e}^i),$$

где $\mathbf{e}^i$ — единичные векторы вдоль координатных осей.

разования полей и источников, оставляющие систему (1.2) инвариантной. В частности, метрику вспомогательной системы можно сохранить в виде (2.1), что и будет использовано в гл. 3.

Как известно (см., например, обзор [20]) в рамках СТО для введения 4-тензорных величин часто удобен переход к вектор-потенциальному описанию. В произвольной косоугольной системе координат при наличии материальной среды связь между потенциальными и полевыми характеристиками усложняется, и преимущества такого описания в значительной мере утрачиваются. Будем поэтому исходить из антисимметричных тензоров индукции D^{ik} и поля B^{ik}, контравариантные компоненты которых выражаются через составляющие соответствующих векторов в 3-пространстве следующим образом:

$$D^{\alpha\beta} = -\eta^{\alpha\beta\gamma}H_\gamma, \quad D^{\alpha 0} = (g_{00})^{-1/2} D^\alpha, \tag{2.4}$$

$$B^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta\gamma}E_\gamma, \quad B^{\alpha 0} = (g_{00})^{-1/2} B^\alpha; \tag{2.5}$$

здесь $\eta^{\alpha\beta\gamma}$ — антисимметричный единичный тензор в 3-пространстве, метрический тензор которого определяется в соответствии с [18] как

$$h_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}. \tag{2.6}$$

При этом $\eta^{\alpha\beta\gamma} = h^{-1/2}e^{\alpha\beta\gamma}$, где $e^{\alpha\beta\gamma}$ — антисимметричный единичный тензор, определенный по значению $e^{123} = 1$, $h = \operatorname{Det} h_{\alpha\beta}$.

Вводя 4-вектор тока обычным образом [18]:

$$I^k = (g_{00})^{-1/2}(c\rho,\ j^k), \tag{2.7}$$

уравнения (1.2) для величин D^{ik}, B^{ik} можно записать в виде

$$\frac{\partial D^{ik}}{\partial x^i} = \frac{4\pi}{c} I^k, \quad \frac{\partial B^{ik}}{\partial x^i} = 0, \tag{2.8}$$

инвариантном относительно преобразований (2.2) *).

В соответствии с общими правилами преобразования тензоров контравариантные компоненты D^{ik} пересчитываются по формулам

$$D'^{ik} = \alpha^i_l \alpha^k_n D^{ln} \tag{2.9}$$

(аналогично — для B^{ik}), а переход от контравариантных компонент к ковариантным в заданной системе координат осуществляется с помощью метрического тензора, например,

$$D_{0\beta} = D^{ik}g_{0i}g_{\beta k} = \sqrt{g_{00}}\,D_\beta - \eta^{\alpha\gamma\delta}g_{0\alpha}g_{\beta\gamma}H_\delta. \tag{2.10}$$

Формулы (2.4) — (2.10) позволяют полностью найти поля и материальные уравнения во вспомогательной электромагнитной системе K', если они известны в исходной системе K, и наоборот. Так, если в K: $D^{ik} = \varepsilon^{ik}_{lm}B^{lm}$, то компоненты материального тензора $\hat{\varepsilon}$ в системе K' с метрикой, определяемой в соответствии с (2.3), равны

$$\varepsilon'^{ik}_{lm} = \alpha^i_j \alpha^k_s \tilde{\alpha}^n_l \tilde{\alpha}^p_m \varepsilon^{js}_{np}. \tag{2.11}$$

Вид тензора $\hat{\varepsilon}$ для конкретной среды нетрудно установить с помощью формул (2.4), (2.5). Например, для анизотропного диэлектрика, описываемого

*) Ковариантная запись уравнений Максвелла в виде (2.8) (см. также [1]) для случая материальных сред предпочтительнее, чем использованная в [2], так как, в отличие от последней, в явном виде сохраняет свойство двойственности исходных уравнений (1.2), т. е. их симметрию по отношению к заменам $\mathbf{E} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{B} \to -\mathbf{D}$ в среде без источников.

в 3-координатах тензором диэлектрической проницаемости $\varepsilon^{\alpha\beta}$ и скалярной магнитной проницаемостью μ, отличные от нуля компоненты антисимметричного материального 4-тензора $\hat{\varepsilon}$ равны

$$\varepsilon^{0\alpha}_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{h}{g_{00}}}\, e_{\beta\gamma\mu}\varepsilon^{\alpha\mu}, \qquad \varepsilon^{\alpha\beta}_{0\nu} = \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{g_{00}}{h}}\, e^{\alpha\beta\gamma}h_{\gamma\nu}, \tag{2.12}$$

причем, как следует из (2.6): $g_{00}h = -g = -\mathrm{Det}\, g_{ik}$. Частный случай вакуума получается из (2.12) при $\varepsilon^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}$, $\mu = 1$, в том числе, в декартовых координатах, когда метрический тензор 4-пространства выбран в виде (2.1): $\varepsilon^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$.

Итак, исходной задаче отыскания полей в некоторой электродинамической системе K с заданными источниками и определенными материальными уравнениями среды можно сопоставить другую (вспомогательную) задачу, где решаются те же исходные уравнения (1.2), но уже в среде с иными материальными соотношениями, определяемыми формулами (2.4), (2.5), (2.9) и соответствующим образом пересчитанными источниками (2.7). Причем решения этих двух задач будут однотипными и могут быть получены друг из друга простым пересчетом по формулам вида (2.9).

Заметим, что возможности сопоставления могут быть расширены за счет принципа подобия электромагнитных систем: если D^{ik} и B^{ik} удовлетворяют уравнениям (2.8) с источниками I^k, то величины $k_D D^{ik}$, $k_B B^{ik}$ суть решения тех же уравнений с источниками $k_D I^k$, где k_D, k_B — произвольные постоянные множители.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТО И ОТО КАК ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ СОПОСТАВИМЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим отношение метода сопоставления к преобразованиям СТО и ОТО на языке приведенных в гл. 2 общих формул. Если матрица α^i_k в (2.2) равна

$$\alpha^i_k = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $\beta = V/c$, то метрика пространства в K' согласно (2.3) остается галилеевской, и преобразование (2.9) переводит материальные уравнения (1.3) в формулы (1.4), т. е. процедура сопоставления соответствует преобразованиям Лоренца — Минковского (СТО), когда в качестве сопоставляемой системы рассматривается та же самая среда, но взятая в другой инерциальной системе отсчета.

Для произвольных α^i_k сопоставление может быть проведено двояким образом. 1) Выбор метрики в K', в соответствии с (2.3), означает, что сопоставляемой системой является та же среда, но описываемая уже не в ортогональных, а в косоугольных 4-координатах. 2) Всякий другой выбор метрики делает процедуру сопоставления более формальной и означает, что во вспомогательной задаче рассматривается, вообще говоря, уже совершенно иная, чем в K, среда, которая даже необязательно должна быть физически реализуемой (например, она может соответствовать отрицательным значениям плотности; см. гл. 5). Это обстоятельство не является препятствием к применению метода сопоставления — достаточно того, чтобы вспомогательная система была более простой для расчета.

Иными словами, в первом случае сопоставление осуществляется сменой системы координат для одной и той же среды (ОТО), а во втором (и, как мы надеемся показать в гл. § 5, более интересном для приложений) оно состоит в подборе подходящей среды при сохранении в K', возможно, более простых метрических соотношений.

Соответствие между этими двумя подходами можно наглядно продемонстрировать на упомянутом выше примере сопоставления электродинамических задач в статическом гравитационном поле и в диэлектрической среде с заданной проницаемостью.

Пусть в K рассматривается электромагнитное поле в вакууме в присутствии статического гравитационного поля. Такая система описывается метрическим 4-тензором g_{ik}, где все компоненты $g_{0\alpha} = 0$ [18], и материальным 4-тензором ε^{ik}_{lm}, отличные от нуля компоненты которого согласно (2.12) равны

$$\begin{aligned} \varepsilon^{0\alpha}_{\beta\gamma} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{h}{g_{00}}}\, e_{\beta\gamma\mu} h^{\alpha\mu}, \\ \varepsilon^{\alpha\beta}_{0\nu} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_{00}}{h}}\, e^{\alpha\beta\gamma} h_{\gamma\nu}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Потребуем, чтобы в K' гравитационное поле отсутствовало, и при этом условии найдем здесь компоненты материального тензора $(\varepsilon')^{ik}_{lm}$. Преобразование, переводящее метрический 3-тензор $h_{\mu\nu}$ системы K в единичный метрический тензор $(h')_{\alpha\beta}$, соответствующий галилееву пространству в K', запишем в виде

$$(h')_{\alpha\beta} = \tilde{a}^{\mu}_{\alpha}\tilde{a}^{\nu}_{\beta} h_{\mu\nu}, \quad (h')^{\alpha\beta} = a^{\alpha}_{\mu} a^{\beta}_{\nu} h^{\mu\nu}. \tag{3.3}$$

Выражая отличные от нуля компоненты тензора ε^{ik}_{lm} через соответствующие компоненты $(\varepsilon')^{ik}_{lm}$ с помощью (3.3) и подставляя эти выражения в (3.2), нетрудно получить

$$\begin{aligned} (\varepsilon')^{\mu\nu}_{0\delta} &= -\frac{1}{2}\sqrt{g_{00}}\, e^{\mu\nu}_{\delta}, \\ (\varepsilon')^{0\mu}_{\gamma\delta} &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\, e^{\mu}_{\gamma\delta}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Согласно (2.4), (2.5) соотношения (3.4) эквивалентны двум материальным уравнениям

$$(D')^{\gamma} = (g_{00})^{-1/2} (E')^{\gamma}, \quad (H')^{\alpha} = (g_{00})^{1/2} (B')^{\alpha}, \tag{3.5}$$

означающим, что во вспомогательной задаче без гравитационного поля должна быть рассмотрена изотропная однородная среда с диэлектрической и магнитной проницаемостью $\varepsilon = \mu = (g_{00})^{-1/2}$. При этом электромагнитные поля в этих двух физически различных системах оказываются аналогичными и могут быть получены друг из друга по формулам вида (2.9). Другими словами, изменение метрики пространства — времени в гравитационном поле в смысле влияния на электромагнитные поля может быть эквивалентно наличию диэлектрической среды [4, 18].

4. ТРЕХМЕРНЫЕ ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЛЕЙ И ИСТОЧНИКОВ

Хотя использование 4-тензорного формализма позволяет в наиболее простом и общем виде сформулировать метод сопоставления, при решении конкретных задач оказывается целесообразным переход к 3-координатной векторной записи величин, характеризующих электромагнитное поле.

3-векторные формулы преобразования, в частности, удобнее тем, что они не зависят явно от вида метрического тензора. В тех же случаях, когда эти формулы будут расписываться по проекциям, мы для простоты везде ниже будем подразумевать метрику галилеевской, не делая различия между ко- и контравариантными проекциями. Линейное преобразование (2.2) координат и времени с помощью матрицы $\hat{\nu}$ и численного множителя $\varkappa$ запишем следующим образом:

$$\mathbf{r}' = \hat{\nu}\,(\mathbf{r} - \mathbf{a}t), \quad t' = \varkappa\,(t - \mathbf{br}), \tag{4.1}$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — произвольные 3-векторы. Тогда из (2.9) в обозначениях (4.1) (либо непосредственно подстановкой (4.1) в уравнения Максвелла) с учетом преобразования подобия нетрудно получить правила пересчета векторов индукции $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ и источников ρ, $\mathbf{j}$ между системами K и K':

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D}' &= k_D \varkappa \hat{\nu}\,(\mathbf{D} - \mathbf{a}\,(\mathbf{bD}) + c\,[\mathbf{bH}]), \\ \mathbf{B}' &= k_B \varkappa \hat{\nu}\,(\mathbf{B} - \mathbf{a}\,(\mathbf{bB}) - c\,[\mathbf{bE}]), \end{aligned}\right. \tag{4.2}$$

$$\mathbf{j}' = k_D \hat{\nu}\,(\mathbf{j} - \mathbf{a}\rho), \quad \rho' = k_D \varkappa\,(\rho - \mathbf{bj}). \tag{4.3}$$

Формулы преобразования напряженностей полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ оказываются, вообще говоря, довольно громоздкими, однако для интересующего нас далее случая, когда матрица $\hat{\nu}$ считается диагональной (отсутствует поворот осей в координатном 3-пространстве), их можно записать в относительно компактном виде

$$\hat{\nu}\mathbf{E}' = k_B \nu\,(\mathbf{E} + c^{-1}\,[\mathbf{aB}]), \quad \hat{\nu}\mathbf{H}' = k_D \nu\,(\mathbf{H} - c^{-1}\,[\mathbf{aD}]), \tag{4.4}$$

где $\nu = \operatorname{Det} \hat{\nu}$.

Преобразованиям Лоренца (1.1) в обозначениях (4.1) соответствуют, очевидно, следующие значения параметров:

$$\mathbf{a} = c^{-2}\mathbf{b} = \mathbf{V}, \ \varkappa = \gamma, \ \hat{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{4.5}$$

при этом соотношения (4.2), (4.4) переходят в формулы Минковского, если взять $k_D = k_B$.

Напомним, что одним из преобразований вида (2.2), (4.1), оставляющих инвариантными уравнения Максвелла, является преобразование Галилея, когда отличные от нуля компоненты матрицы α_k^i в (2.2) равны $\alpha_i^i = 1$, $\alpha_1^0 = -a/c$ или, в обозначениях (4.1), $b = 0$, $\nu_i^i = \varkappa = 1$. При этом правила пересчета полей и источников в соответствующую вспомогательную систему K' суть (для краткости полагаем $k_D = k_B = 1$):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + c^{-1}\,[\mathbf{aB}], & \mathbf{D}' &= \mathbf{D}, \\ \mathbf{H}' &= \mathbf{H} - c^{-1}\,[\mathbf{aD}], & \mathbf{B}' &= \mathbf{B}, \\ \mathbf{j}' &= \mathbf{j} - \mathbf{a}\rho, & \rho' &= \rho \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

и оказываются даже проще, чем соответствующие релятивистские соотношения. В отличие от последних, они не имеют особенностей при $a \geqslant c$, что делает их использование одинаково удобным для произвольных значений a. Если в K материальные уравнения имеют вид (1.3), то в K' согласно (4.6) получим соотношения

$$\mathbf{D}' = \varepsilon\,(\mathbf{E}' - c^{-1}\,[\mathbf{aB}']), \quad \mathbf{B}' = \mu\,(\mathbf{H}' + c^{-1}\,[\mathbf{aD}]), \tag{4.7}$$

также более простые, чем формулы Минковского (1.4), соответствующие выбору вспомогательной системы на основе (4.5). Как уже подчеркивалось во введении, исключение составляет случай вакуума, когда преобразования Лоренца являются привилегированными.

Таким образом, можно сказать, что преобразования полей и источников, получаемые на основе формул Галилея, могут рассматриваться, в принципе, не только как приближенные при $\beta = a/c \ll 1$, но и как вполне точные соотношения, если иметь в виду сопоставление сред, а не преобразование систем отсчета. При этом векторы индукции $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ являются инвариантными, так что отличие от релятивистских формул пересчета имеется уже в первом порядке по β.

5. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА СОПОСТАВЛЕНИЯ

Как уже отмечалось, использование нелоренцовских преобразований и методики сопоставления может быть удобным при исследовании полей в средах с параметрами или источниками, изменяющимися в пространстве и во времени по закону бегущей волны произвольного профиля: $p = p(x - Vt)$, особенно при $V \geqslant c$. В качестве предельных случаев, сюда относятся также задачи с резкими движущимися границами и точечными источниками.

Пусть, например, в исходной системе K материальные уравнения имеют вид (1.3), т. е. среда неподвижна, а источники движутся и являются функциями вида $j(x - Vt)$, $\rho(x - Vt)$. Положив в (4.1) $a = V\cdot x_0$ (т. е. взяв $x' \backsim x - Vt$) вспомогательную систему (K'), можно выбрать стационарный (источники в ней не будут зависеть от t'). В отличие от преобразований Лоренца, одновременно остальные коэффициенты в (4.1) удается подобрать так, чтобы среда в K' также была неподвижной и материальные уравнения сохраняли аналогичный (1.3) вид

$$\mathbf{D}' = \varepsilon'\mathbf{E}', \quad \mathbf{B}' = \mu'\mathbf{H}', \tag{5.1}$$

где ε', μ' — некоторые постоянные. Иными словами, обусловленную относительным движением среды и источников анизотропию задачи можно, в отличие от (1.4), полностью «загнать» в формулы преобразования полей и источников (4.2) — (4.4), что, разумеется, для вычислений проще. Подстановкой (4.2) и (4.4) в (5.1) нетрудно убедиться, что для этого необходимо и достаточно выполнение соотношения

$$\sqrt{\frac{\mu'}{\mu}}\,k_D = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}\,k_B, \tag{5.2}$$

представляющего собой условие подобия электромагнитных систем рассматриваемого вида, и условий

$$\begin{gathered} \mathbf{b} = \varepsilon\mu c^{-2}V\mathbf{x}_0, \quad \nu_1^1 = \varkappa\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon'\mu}}, \\ \nu_3^3 = \nu_2^2 = \nu_1^1\sqrt{1-\beta^2\varepsilon\mu} \end{gathered} \tag{5.3}$$

Значения ε' и μ' в (5.1) можно взять, например, совпадающими с исходными значениями ε и μ или же отвечающими вакууму ($\varepsilon' = \mu' = 1$). В последнем случае согласно (5.2), (5.3) замена (4.1) приобретает вид

$$\begin{gathered} z' = \tilde{\varkappa} z, \quad y' = \tilde{\varkappa} y, \quad x' = \tilde{\varkappa}(1 - \beta^2\varepsilon\mu)^{-1/2}(x - Vt), \\ t' = \tilde{\varkappa}(\varepsilon\mu)^{-1/2}(1 - \beta^2\varepsilon\mu)^{-1/2}(t - \varepsilon\mu c^{-2}Vx). \end{gathered} \tag{5.4}$$

Преобразования (5.4) напоминают лоренцовские и переходят в них при $\varepsilon\mu \to 1$, $\tilde{\varkappa} = 1$. Вообще говоря, множитель $\tilde{\varkappa}$ и один из коэффициентов k_D и k_B остаются произвольными, их можно выбрать, например, так, чтобы упростить формулы (4.3) пересчета самих источников.

Таким образом, поля движущихся в однородной среде источников могут быть найдены через хорошо известные решения для неподвижных источников *в вакууме* путем простого пересчета полей и координат в соответствии с формулами (4.2), (4.4). Проиллюстрируем это на примере точечного заряда, движущегося со скоростью V вдоль оси x в недиспергирующем диэлектрике. Статическое решение вспомогательной задачи возьмем в виде

$$\mathbf{D}' = \mathbf{E}' = q\,(r')^{-3}\,\mathbf{r}', \quad \mathbf{H}' = \mathbf{B}' = 0. \tag{5.5}$$

Соответствующее решение исходной задачи находим подстановкой соотношений (5.2), (5.3), (5.5) в формулы пересчета полей (4.2), (4.4). Выбирая для упрощения записи $\varkappa = 1$, $k_D = (\varepsilon\mu)^{-3/2}(1 - \beta^2\varepsilon\mu)^{-1}$, имеем

$$\begin{aligned} E_x &= q\varepsilon^{-1}(x - Vt)\,R^{-3}, & H_x &= 0,\\ E_y &= q\varepsilon^{-1}yR^{-3}, & H_y &= -\beta qzR^{-3}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

где $R = \sqrt{(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \beta^2\varepsilon\mu)}$. Остальные компоненты полей легко получить из материальных уравнений (1.3) с учетом цилиндрической симметрии задачи.

Формулы (5.6), естественно, согласуются с известными выражениями полей равномерно движущихся зарядов, полученными традиционным методом (см., например, [21]). Заметим, что уже из (5.4) видна особенность, имеющая место в черенковском случае ($\beta^2\varepsilon\mu > 1$), здесь вещественным x, t соответствуют мнимые значения x', t' и наоборот. В результате в решении (5.6) на поверхности конуса $(x - Vt)^2 = (y^2 + z^2)(\beta^2\varepsilon\mu - 1)$ поля имеют расходимость, связанную с черенковским излучением.

Аналогичным образом можно поступить и при исследовании полей движущихся в среде осцилляторов,— использование преобразований (5.4) позволяет выразить эти поля через известное решение для неподвижного осциллятора в вакууме. Здесь также наглядно учитываются особенности, возникающие при «сверхсветовом» движении.

Укажем теперь, как в рамках рассматриваемого здесь класса линейных преобразований (2.2) можно исследовать волны в средах с переменными параметрами (поскольку при непосредственном приложении к средам с переменными ε и μ преобразований типа (5.4) последние уже не являются линейными). Для этого можно воспользоваться тем, что разделение индуцированного в среде тока между током проводимости $\mathbf{j}$ и вектором индукции $\mathbf{D}$ в (1.2) проводится, вообще говоря, неоднозначным образом. Поэтому для сред с переменными параметрами (такими, как плотность, температура и т. д.) соответствующую часть поляризационного тока можно включить в величину $\mathbf{j}$, оставляя при необходимости ε и μ отличными от единицы лишь для учета однородной «фоновой» среды или влияния замедляющих систем. Тогда материальные уравнения (1.3) должны быть дополнены соотношением, связывающим ток $\mathbf{j}$ с электромагнитным полем, например, в форме

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma}\mathbf{E}, \tag{5.7}$$

где тензор проводимости $\hat{\sigma}$ для диспергирующих сред является линейным оператором *).

Для сред с переменными параметрами оператор $\hat{\sigma}$ будет явно зависеть от r и t. Если, в частности, волна параметра имеет вид движущегося слоя неизменного профиля ($\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(x - Vt)$), то заменой $x' \backsim x - Vt$ задачу

*) Такая запись не исключает учета влияния магнитного поля волны, существенного для движущихся сред, поскольку поле $\mathbf{B}$ может быть выражено через $\mathbf{E}$ согласно (1.2).

снова можно свести к стационарной — к исследованию отражения и прохождения волн во вспомогательном неподвижном слое, в том числе и при $V > c$. При этом опять-таки подходящим выбором зависимости $t'(t, x)$ удается упростить материальные соотношения среды по сравнению с релятивистскими соотношениями. В итоге для движущихся слоев можно непосредственно использовать методы и результаты, хорошо известные для неподвижных пространственно-неоднородных сред [22, 23].

Далее, поскольку здесь коэффициенты в уравнениях (1.2) не зависят от t', переменные x' и t' разделяются, и задача отыскания полей в форме $E' = f'(x')\, g'(t')$ может быть сведена к решению уравнения с переменными коэффициентами (уже в обыкновенных производных) для функции $f'(x')$, вид которого зависит от оператора $\hat{\sigma}$. Для другого же множителя $g'(t')$ получается уравнение с постоянными коэффициентами; его решение можно взять гармонически по t' (т. е. пропорциональным $\exp(i\omega' t')$). Тогда процедуру сопоставления удобно провести несколько в иной форме — в ряде конкретных задач преобразование $t'(x, t)$ удается подобрать так, чтобы уравнение для $f'(x')$ и для аналогичного множителя $f(x - Vt)$ в исходной задаче было инвариантным без пересчета искомых функций (в отличие от (4.2), (4.4))[11]. Физически это означает, что сопоставляемой системой является такой же по природе, но неподвижный слой. В результате при известной функции $f'(x')$ для отыскания искомого решения $E(x, t)$ достаточно в выражения $E' = f'(x')\, g'(t')$ вместо x', t' подставить (4.1). В качестве примера приведем случай движущегося слоя плазмы с переменной концентрацией $N(x, t) = N(x - Vt)$. Изменение $N(x, t)$, в принципе, может быть обусловлено как движением (дрейфом) неоднородной плазмы, так и ионизационно-рекомбинационными процессами (в последнем случае и возможно $V > c$, на что неоднократно указывалось в литературе — см., например, [11, 17, 24, 25]). Следует заметить, что в зависимости от механизма изменения концентрации вид оператора $\hat{\sigma}(r, t)$ и, соответственно, поведение электромагнитных волн оказываются различными при одной и той же зависимости $N(\mathbf{r}, t)$ (см. [26–28]), что нередко упускается из виду.

В частности, для высокочастотных полей в неподвижной нестационарной плазме связь $\mathbf{j}$ с $\mathbf{E}$ при некоторых идеализациях можно записать в обычном для феноменологической теории диспергирующих сред виде

$$\mathbf{j}(t) = \int_0^\infty \sigma(t, \tau)\, \mathbf{E}(t-\tau)\, d\tau, \tag{5.8}$$

причем ядро $\sigma(t, \tau)$ оказывается равным [26, 27]

$$\sigma(t, \mathbf{r}) = e^2 m^{-1} N(\mathbf{r}, t-\tau) \exp[-(\nu + \delta)\tau];$$

здесь e, m и $N(\mathbf{r}, t)$ — заряд, масса и концентрация электронов, изменяющаяся во времени из-за процессов ионизации и рекомбинации, ν — эффективная частота упругих столкновений электронов с тяжелыми частицами, δ^{-1} — среднее время жизни свободных электронов. Вообще говоря, с учетом (5.8) из системы (1.2) для вектора $\mathbf{E}$ (и, следовательно, для множителя $f'(x')$) получается уравнение третьего порядка. Если для простоты пренебречь влиянием столкновений (что допустимо при $N^{-1} |\partial N/\partial t| \gg (\nu + \delta)$), для поля $\mathbf{E}$ в плоской волне, распространяющейся вдоль оси x, приходим к уравнению второго порядка типа Клейна — Гордона

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon}{c^2}\, \omega_p^2 (x - Vt)\, E, \tag{5.9}$$

где $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m\varepsilon}$ — плазменная частота.

Полагая в (5.9) $E = f'(x') \exp(i\omega' t')$, причем x' и t' вводятся согласно (4.1), задачу в соответствии с вышесказанным можно свести к исследованию волн в стационарном (неподвижном) слое плазмы с профилем $N'(x')$, подобным исходному, находящейся в неподвижном же диэлектрике с проницаемостью ε'. Конкретные значения N' и ε' зависят от выбора коэффициентов в (4.1). Например, если взять $\nu_1^1 = 1$, $\varkappa = 1/(1-\beta\sqrt{\varepsilon})$, $b = \sqrt{\varepsilon}/c$, получаем [12, 13]

$$N' = (1-\beta^2\varepsilon) N, \quad \varepsilon' = \varepsilon(1-\beta^2\varepsilon)^{-2}; \tag{5.10}$$

если же $\nu_1^1 = \varkappa = (1-\beta^2\varepsilon)^{-1/2}$, $b = \varepsilon V c^{-2}$, то

$$N' = N, \quad \varepsilon' = \varepsilon \tag{5.11}$$

и т. д.

По известной структуре поля во вспомогательном слое путем пересчета E' и ω' нетрудно найти амплитуды и частоты вторичных волн в исходной задаче, их групповые и фазовые скорости и т. д. В частности, частоты падающей (ω_0) и вторичных (ω) волн вне слоя так же, как и для резких границ [24], оказываются связанными соотношениями Допплера

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1-(V/v_0)}{1-(V/v)}, \tag{5.12}$$

где v_0, v — фазовые скорости волн. Коэффициенты отражения (R) и проникновения (T) волн по мощности для движущегося слоя можно непосредственно выразить через аналогичные величины для вспомогательного слоя (R', T'):

$$R = R' \frac{(\omega_0 k_r)}{(\omega_r k_0)}, \quad T = T' \frac{(k_0' \omega_0 k_t)}{(k_t' \omega_t k_0)}, \tag{5.13}$$

где k — волновое число, а индексы r, t относятся к отраженной и проходящей волнам соответственно. В частности, если перед фронтом ионизации плазма отсутствует ($v_0 = v_r$), то $R = R'$. Условие полного отражения ($T = 0$) здесь может быть выполнено даже при $T' \neq 0$, если найденная согласно (5.12) частота $\omega_t \leqslant \omega_{p\max}$, т. е. $\mathrm{Re}\, k_t = 0$.

Отметим, далее, что метод сопоставления позволяет также в общем виде получить соотношения, связывающие полные энергии (W) и частоты квазимонохроматических волновых пакетов независимо от конкретного профиля плазменного слоя. Действительно, исходя из того, что в данном приближении во вспомогательной системе энергия поля сохраняется, т. е. $R' + T' = 1$, для исходного слоя, движущегося с «досветовой» скоростью ($\beta\sqrt{\varepsilon} < 1$), находим [13]

$$W_0\omega_0 = W_r\omega_r + W_t\omega_t. \tag{5.14a}$$

Поскольку при ионизации $\partial N/\partial t > 0$ и ω_r, $\omega_t > \omega_0$, из (5.14a) следует, что $W_0 < W_r + W_t$, т. е. суммарная энергия электромагнитных волн уменьшается.

В сверхсветовом случае ($\beta\sqrt{\varepsilon} > 1$) в формулах пересчета параметров имеются особенности. Например, в варианте (5.10) концентрация N' вспомогательного слоя оказывается отрицательной, что физически нереализуемо. Это обстоятельство, однако, не препятствует формальной процедуре отыскания решения и означает лишь, что дисперсионное уравнение вспомогательной среды имеет вид $c^2k^2/\varepsilon' = \omega^2 + |\omega_p'|^2$ *). В отличие от исходной задачи, когда $c^2k^2/\varepsilon = \omega^2 - \omega_p^2$, и при $\omega < \omega_p$ плазма непро-

*) При другом варианте сопоставления отсутствуют особенности в формулах (5.11), зато становятся мнимыми переменные x', t', и дисперсионное уравнение для K' получается таким же, как и в рассмотренном случае.

зрачна, величина k' вещественна при любых ω'. Другими словами, в сверхсветовом случае сколь угодно низкочастотное возмущение трансформируется по спектру так, что $\omega_{t1} > \omega_p$, и волна «пролезает» через плазму. Таким образом, при $\omega_p \gg \omega_0$ здесь имеет место большой коэффициент преобразования частоты, на что неоднократно указывалось в литературе (см., например, [12, 13, 24, 25]). Отметим, что отраженной волны теперь, как таковой, уже нет, а имеется вторая прошедшая волна с частотой ω_{t2}, групповая скорость которой в исходной задаче направлена вдогонку слою. В результате из равенства $R' + T' = 1$ в этом случае следует [13]

$$W_0\omega_0 = W_{t1}\omega_{t1} - W_{t2}\omega_{t2}. \tag{5.14б}$$

Несмотря на противоположный знак у последнего члена по сравнению с (5.14а), анализ показывает [13], что и здесь всегда $W_{t1} + W_{t2} < W_0$. Физически это понятно, если учесть, что при любой скорости движения волны ионизации часть электромагнитной энергии идет на сообщение поступательного движения вновь рождающимся электронам.

В случае движущейся плазмы уравнение (5.9) уже несправедливо; здесь, кстати, принципиально необходимым является учет пространственной дисперсии. В связи с этим более удобно исходить из соотношений микротеории, откуда (без учета теплового движения и т. п. [11, 12]) снова можно получить уравнение Клейна — Гордона, но уже для векторного потенциала $\mathbf{A}$ (при этом $\mathbf{E} = -c^{-1}\,\partial\mathbf{A}/\partial t$, $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$). В результате закон дисперсии и все кинематические формулы (для частот и волновых векторов, фазовых и групповых скоростей и т. п.) остаются такими же, как и в предыдущем случае, однако амплитудные и энергетические соотношения существенно изменяются. Так, из условия $R' + T' = 1$ вместо (5.14) теперь следует [12]

$$\begin{aligned} &\frac{W_0}{\omega_0} = \frac{W_r}{\omega_r} + \frac{W_t}{\omega_t} \qquad (\beta\sqrt{\varepsilon} < 1),\\ &\frac{W_0}{\omega_0} = \frac{W_{t1}}{\omega_{t1}} - \frac{W_{t2}}{\omega_{t2}} \qquad (\beta\sqrt{\varepsilon} > 1). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Формулы (5.15) в определенном смысле обобщают известные соотношения Мэнли — Роу [29] на случай произвольного апериодического изменения параметров среды. Первая из них, фактически, означает сохранение суммарного числа квантов при отражении и преломлении; суммарная энергия при этом в зависимости от соотношения между ω_0 и ω_r, ω_t может как увеличиваться, так и уменьшаться. Если же отражением пренебречь ($W_r = 0$), то отсюда имеем $W/\omega = \mathrm{const}$. Для сред с плавно изменяющимися параметрами справедливость подобного адиабатического инварианта была установлена в работах [30, 31] (см. также [24, 28, 32]). Таким образом, при «вхождении» волнового пакета в более плотную плазму его частота и энергия увеличиваются за счет кинетической энергии движущейся плазмы. Ранее соотношения вида (5.15) были найдены для движущихся резких границ (см. [24, 32]).

Из второго же равенства (5.15) вытекает, что при «сверхсветовом» движении неоднородной плазмы происходит индуцированное рождение новых квантов, что можно трактовать как вынужденное черенковское излучение движущегося слоя в замедляющей диэлектрической среде. Интересно отметить, что дисперсионное уравнение вспомогательной среды здесь совпадает с соответствующим уравнением, полученным в работе [33] для неподвижной плазмы с инверсной заселенностью.

Таким образом, сопоставление со вспомогательным неподвижным слоем позволяет провести исчерпывающее исследование электромагнитных волн в системах с движущимися плазменными слоями. Аналогичный метод применим и в более сложных случаях, например, в рамках кинетической теории для нагретой движущейся плазмы [14], когда имеется, фактически, не один переменный параметр $N(x - Vt)$, как выше, а континуальный набор параметров — невозмущенная функция распределения. При этом дисперсионное уравнение (и кинематические соотношения для частот и волновых чисел) получается иным; тем не менее, энергетические соотношения (5.15) по-прежнему остаются в силе, если пренебречь потерями поверхностного характера, существенными лишь для резких границ.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги, отметим, что выше не ставилось целью провести подробный обзор конкретных физических задач и результатов, полученных в литературе при помощи метода сопоставления; с ними можно ознакомиться по прилагаемой библиографии. Авторы хотели больший акцент сделать на принципиальной и методической стороне вопроса — пояснить сущность процедуры сопоставления, отношение ее к преобразованиям СТО и ОТО и подчеркнуть имеющиеся преимущества по сравнению с последними. Нам кажется, что возможности этой методики при решении различных задач далеко не исчерпаны. Заметим, прежде всего, что она может быть полезной при исследовании не только электромагнитных полей, но и волновых систем произвольной природы. Используя инвариантность соответствующих динамических уравнений относительно различных преобразований независимых переменных, здесь также в ряде случаев можно добиться существенного упрощения задачи. К примеру, в работах [15, 16] таким методом были получены определенные результаты для систем, описываемых уравнениями Лагранжа. Наконец, возможно сопоставление систем, связанных также нелинейными преобразованиями независимых переменных. Некоторые задачи с использованием инвариантности уравнений электродинамики при нелинейных преобразованиях пространства — времени решены, например, в [11, 16, 34], однако ввиду сложности и разнообразия этой проблемы в настоящее время затруднительно высказать какие-либо общие соображения и рекомендации по выбору оптимальных преобразований.

Авторы признательны Б. М. Болотовскому, С. Н. Столярову и В. А. Угарову за обсуждение затронутых здесь вопросов и полезные замечания.

Научно-исследовательский радиофизический институт, Горький
Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зоммерфельд, Электродинамика, М., ИЛ, 1958.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Физматгиз, 1959.
3. В. А. Угаров, Специальная теория относительности, М., «Наука», 1969.
4. К. Мёллер, Теория относительности, М., Атомиздат, 1975.
5. H. Minkowski, Gött. Nachr. 53 (1908); Math. Ann. 68, 472 (1910) (перевод имеется в кн. Принцип относительности, М., Атомиздат, 1973).
6. У. И. Франкфурт, А. М. Френк, Оптика движущихся тел, М., «Наука», 1972.
7. М. Льоцци, История физики, М., «Мир», 1970.
8. В. М. Дуков, Электродинамика, М., «Высшая школа», 1975.
9. H. Poincare, Rend. Circ. Mat. Palermo 21, 129 (1906) (имеется перевод в цит. в [5] сборнике, с. 118).

10. A. Einstein, Ann. Phys. **17**, 891 (1905) (имеется перевод: А. Эйнштейн, Собр. научн. трудов, т. 1, М., «Наука», 1965, с. 7).
11. Н. С. Степанов, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» **5**, 908 (1962).
12. Ю. М. Сорокин, Н. С. Степанов, ibid. **14**, 19 (1971).
13. Ю. М. Сорокин, Н. С. Степанов, ibid. **14**, 686 (1971).
14. Н. С. Степанов, Ю. М. Сорокин, ЖТФ **42**, 578 (1972).
15. Ю. М. Сорокин, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» **15**, 51 (1972).
16. Ю. М. Сорокин, Н. С. Степанов, ПМТФ, № 1, 31 (1972).
17. Б. М. Болотовский, В. Л. Гинзбург, УФН **106**, 577 (1973).
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., «Наука», 1967.
19. М.-А. Тонелла, Основы электромагнетизма и теории относительности, М., ИЛ, 1962.
20. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров, УФН **114**, 569 (1974).
21. Б. М. Болотовский, УФН **62**, 201 (1957).
22. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, М., «Наука», 1967.
23. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, М., «Наука», 1973.
24. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» **14**, 489 (1971) (обзор).
25. С. Н. Столяров, Кр. сообщ. физ. (ФИАН СССР), № 1, 26 (1974).
26. Н. С. Степанов, в кн. XI Всесоюзная конференция по распространению радиоволн. Тезисы докладов, ч. IV, Казань, Изд-во КГУ, 1975, с. 15.
27. Н. С. Степанов, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» **19**, 960 (1976).
28. Yu. A. Kravtsov, L. A. Ostrovsky, N. S. Stepanov, Proc. IEEE **62**, 1492 (1974).
29. J. M. Manley, H. E. Rowe, Proc. IRE **44**, 904 (1956).
30. Н. С. Степанов, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» **3**, 672 (1960).
31. Н. С. Степанов, ЖЭТФ **53**, 2186 (1967).
32. L. A. Ostrovskii, N. S. Stepanov, Sel. papers URSI Symposium Electromag. Waves, Streza, Italy, 1968; Alta Frequenza **38**, n° speciale, Maggio, 204 (1969).
33. В. П. Гаврилов, А. А. Коломенский, ЖТФ **42**, 2524 (1972).
34. А. И. Весницкий, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» **14**, 1531 (1971).