

Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал

# Оптические СОЛИТОНЫ

От волоконных световодов  
к фотонным кристаллам



# OPTICAL SOLITONS

From Fibers to Photonic Crystals

**Yuri S. Kivshar**

Research School of Physical Sciences and Engineering  
Australian National University  
Canberra, Australia

**Govind P. Agrawal**

The Institute of Optics  
University of Rochester  
Rochester, New York, USA



ACADEMIC PRESS  
2003

Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал

# Оптические СОЛИТОНЫ

От световодов  
к фотонным кристаллам

35793

Перевод с английского под редакцией  
профессора Н.Н. Розанова

БИБЛИОТЕКА  
института  
прикладной физики  
Академии наук СССР  
г. Горький



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ  
2005

численным решением (3.6.8) с начальным условием  $u(0, \tau) = \text{sch}(\tau)$ . Так как при  $s \neq 0$  пик движется медленнее крыльев, он запаздывает и представляется сдвинутым к заднему фронту. Запаздывание хорошо аппроксимируется простым выражением  $\tau_d = sz$  при  $s < 0,3$ . Его можно

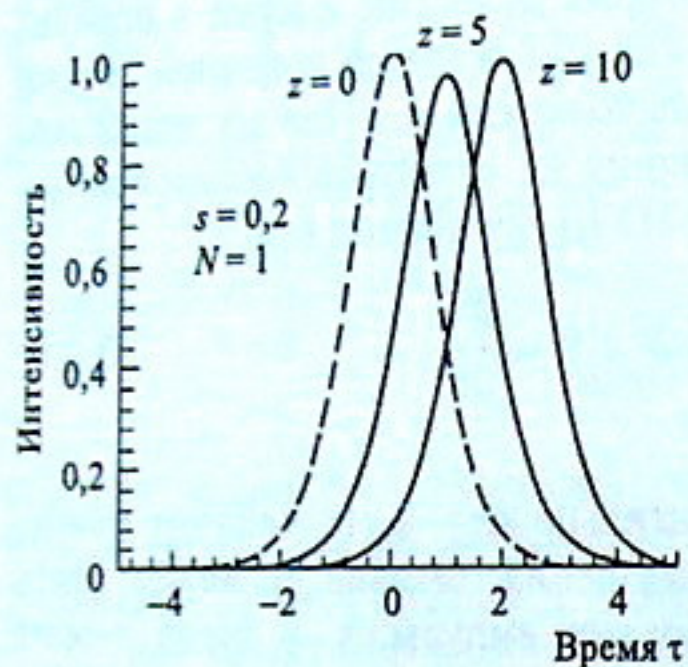


Рис. 3.13. Форма импульса при  $z = 5$  и  $10$  для фундаментального солитона в условиях самообострения фронта ( $s = 0,2$ ). Для сравнения штриховая кривая показывает начальную форму. Сплошные кривые совпадают со штриховой при  $s = 0$

также вычислить, рассматривая член с  $s$  в (3.6.8) как малое возмущение. Хотя при распространении импульс слегка уширяется (на  $\sim 20\%$  при  $z = 10$ ), он тем не менее сохраняет солитонную природу. Поэтому можно предположить, что (3.6.8) имеет солитонное решение, к которому входной импульс приближается асимптотически. Действительно, такое решение существует и имеет вид [70]

$$u(z, \tau) = V(\tau - Mz) \times \exp[i(Kz - M\tau)], \quad (3.6.9)$$

где величина  $M$  связана со сдвигом несущей частоты. В результате этого сдвига меняется групповая скорость. Запаздыва-

ние пика, видимое из рис. 3.13, вызвано этим изменением групповой скорости. Явный вид функции  $V(\tau)$  зависит от  $M$  и  $s$  [107]. В пределе  $s = 0$  эта функция сводится к гиперболическому секансу (3.1.5). Отметим также, что (3.6.8) можно преобразовать к так называемому модифицированному НУШ, которое интегрируется методом обратной задачи рассеяния и интенсивно изучалось в физике плазмы [108–111].

Влияние самообострения на солитоны высших порядков примечательно тем, что оно приводит к их распаду на составляющие — явление, называемое *распадом солитона* [104]. Это явление иллюстрирует рис. 3.14 для солитона второго порядка ( $N = 2$ ) при  $s = 0,2$ . При этом сравнительно большом значении  $s$  два солитона отделяются друг от друга на расстоянии, равном двум солитонным периодам, и продолжают отдаляться при дальнейшем распространении по световоду. Качественно аналогично поведение при меньших значениях  $s$ , только для распада солитона требуются большие расстояния. Распад солитона можно объяснить, используя метод обратной задачи рассеяния с членом, описывающим самообострение, действующим как возмущение. В отсутствие самообострения ( $s = 0$ ) два солитона образуют связанное состояние, так как они распространяются с одинаковой скоростью (собственные значения имеют одинаковую вещественную часть). Возмущающий член разрушает это вырождение, так что два солитона

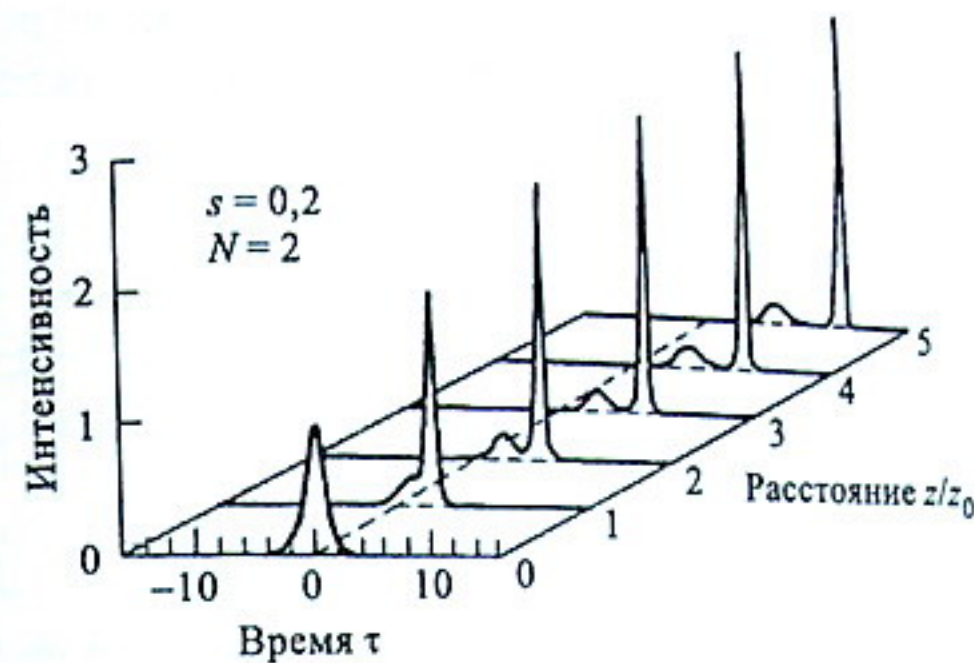


Рис. 3.14. Распад солитона второго порядка ( $N = 2$ ), вызванный самообострением ( $s = 0,2$ ). Показана эволюция на протяжении пяти солитонных периодов

распространяются с различными скоростями. В результате они удаляются друг от друга, и расстояние между ними растёт почти линейно с пройденным путём [105]. Отношение высот пиков на рис. 3.14 около 9, что согласуется с ожидаемым отношением  $(\eta_2/\eta_1)^2$ , где  $\eta_1$  и  $\eta_2$  — мнимые части собственных значений, связанных с преобразованием обратной задачи рассеяния. Солитоны пятого и высших порядков имеют аналогичный характер распада. В частности, солитон третьего порядка ( $N = 3$ ) распадается на три солитона, высоты пиков которых также согласуются с теорией обратной задачи рассеяния.

**3.6.3. Вынужденное комбинационное саморассеяние.** Среди нелинейных эффектов высших порядков наиболее важно вынужденное комбинационное (рамановское) саморассеяние, экспериментально обнаруженное в 1985 г. [112]. Его влияние на солитоны описывается последним членом (3.6.1). Необходимость учёта этого члена стала очевидной, когда в 1986 г. [113] было обнаружено новое явление, называемое *самосдвигом частоты солитона*, и оно было объяснено при учёте инерционности вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) [114]. С тех пор этот нелинейный эффект высшего порядка интенсивно изучался [115–132]. С физической точки зрения ВКР приводит к непрерывному сдвигу вниз несущей частоты солитона, когда спектр импульса становится столь широким, что высокочастотные компоненты импульса могут передавать энергию низкочастотным компонентам того же импульса посредством комбинационного усиления. Вызванный ВКР сдвиг частоты пренебрежим при  $T_0 > 10$  пс, но становится важным для коротких солитонов ( $T_0 < 5$  пс).

Чтобы выделить эффекты вынужденного комбинационного саморассеяния, полезно положить в (3.6.1)  $\delta_3 = 0$  и  $s = 0$ . Тогда эволюция импульсов в световоде описывается уравнением

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = \tau R u \frac{\partial |u|^2}{\partial \tau}, \quad (3.6.10)$$

Подставив в (3.5.4)–(3.5.7)  $\varepsilon(u) = -i\tau_R u(\partial|u|^2/\partial\tau)$ , нетрудно увидеть, ВКР не влияет на амплитуду солитона  $\eta$ , но меняет частоту  $\delta$ :

$$\frac{d\delta}{dz} = -\frac{8}{15} \tau_R \eta^4. \quad (3.6.11)$$

Это уравнение легко интегрируется при постоянном  $\eta$ , тогда  $\delta(z) = -(8\tau_R/15)\eta^4 z$ . При  $\eta = 1$  и  $z = z/L_D = |\beta_2|z/T_0^2$  сдвиг частоты, вызванный ВКР, в размерных единицах записывается так:

$$\Delta\omega_R(z) = -8 \frac{|\beta_2| T_R z}{15 T_0^4}. \quad (3.6.12)$$

Отрицательный знак указывает, что несущая частота уменьшается, то есть спектр солитона сдвигается в сторону больших длин волн («красный» сдвиг).

Физический смысл красного сдвига можно пояснить в рамках ВКР. При длительности импульса  $\sim 1$  пс или менее спектральная ширина импульса столь велика, что ВКР может усилить низкочастотные (красные) компоненты спектра импульса за счёт низкочастотных (синих) компонент того же импульса, действующих как накачка. Процесс продолжается вдоль световода и энергия непрерывно перекачивается от синих компонент к красным. Такая перекачка энергии проявляется как красный сдвиг спектра солитона, причём сдвиг возрастает с расстоянием. Как видно из (3.6.12), частотный сдвиг возрастает линейно вдоль световода. Что ещё более важно, сдвиг меняется с длительностью импульса как  $T_0^{-4}$ , что указывает, что он может становиться весьма большим для коротких импульсов. Например, частота солитона меняется со скоростью  $\sim 50$  ГГц/км для импульса длительностью 1 пс ( $T_0 = 0,57$  пс) в стандартных световодах с  $\beta_2 = -20$  пс<sup>2</sup>/км и  $T_R = 3$  фс. Спектр таких импульсов будет смещаться на 1 ТГц через 20 км распространения. Это большой сдвиг, так как спектральная ширина (по уровню 1/2) такого солитона менее 0,5 ТГц. Обычно сдвигом частоты вследствие вынужденного комбинационного саморассеяния нельзя пренебрегать для импульсов короче 5 пс.

Красный сдвиг солитонов вследствие ВКР наблюдался в 1986 г. для импульсов длительностью 0,5 пс, полученных в лазере на центрах окраски с пассивной синхронизацией мод [113]. Было найдено, что спектр импульса сдвигается на 8 ТГц на длине световода менее 0,4 км. Наблюдавшийся сдвиг спектра был назван *самосдвигом частоты солитона*, потому что он индуцирован самим солитоном. Фактически именно при попытке объяснения наблюдавшегося красного сдвига впервые была осознана инерционная природа ВКР-отклика при передаче ультракоротких импульсов [114].

Влияние вынужденного комбинационного саморассеяния на солитоны высших порядков такое же, как в случае самообострения. В частности, даже при сравнительно малых величинах  $\tau_R$  происходит распад солитонов высших порядков на их составляющие [120]. Такой

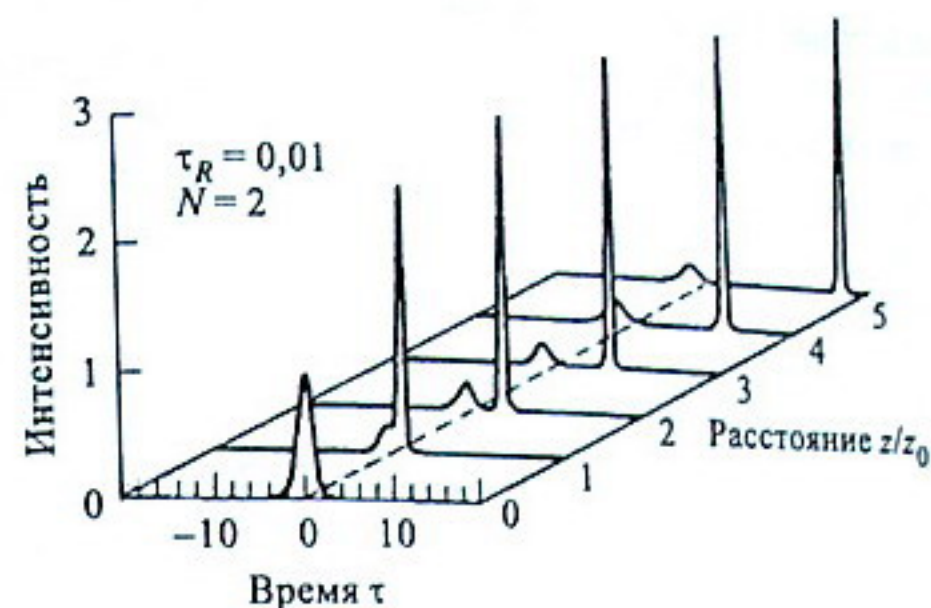


Рис. 3.15. Распад солитона второго порядка ( $N = 2$ ), вызванный вынужденным комбинационным саморассеянием ( $\tau_R = 0,01$ )

распад показан на рис. 3.15 для солитона второго порядка ( $N = 2$ ); распад получен численным решением (3.6.10) при  $\tau_R = 0,01$ . Сравнение рис. 3.14 и 3.15 показывает сходства и различия двух нелинейных механизмов высших порядков. Важное отличие состоит в том, что относительно малые, по сравнению с  $s$ , величины  $\tau_R$  могут вызвать распад солитона на заданном расстоянии. Например, если положить  $s = 0,01$  для рис. 3.14, солитон не расщепится на расстоянии  $z = 5z_0$ . Это свойство указывает, что влияние  $\tau_R$ , скорее всего, практически будет доминировать над влиянием самообострения.

Другое важное различие, видное из рис. 3.14 и 3.15, состоит в том, что в случае самообострения оба солитона сдвинуты к заднему фронту импульса, тогда как в случае ВКР солитон с малой интенсивностью сдвинут к переднему фронту импульса. Это поведение можно качественно объяснить, привлекая рис. 3.16, где спектр импульса при  $z = 5z_0$  сравнивается со спектром входного солитона второго порядка, чья эволюция показана на рис. 3.15. Самое примечательное свойство — это гигантский красный сдвиг спектра солитона — примерно в четыре раза превышающий спектральную ширину на входе при  $\tau_R = 0,01$  и  $z/z_0 = 5$ . Сдвинутый в красную область широкий спектральный пик отвечает на рис. 3.15 сдвигу направо ин-

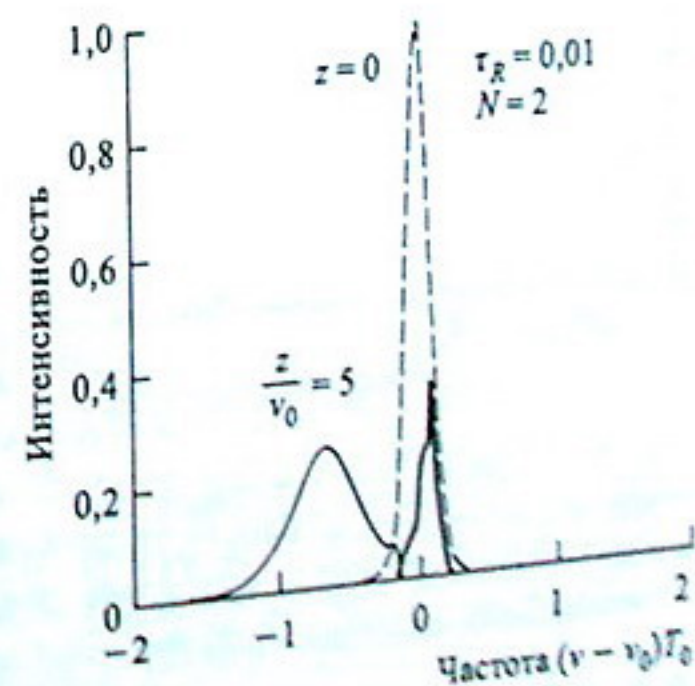


Рис. 3.16. Спектр импульса при  $z/z_0 = 5$  для параметров рис. 3.15. Штриховая кривая показывает спектр входного импульса

тенсивного солитона, тогда как сдвинутая в синюю сторону спектральная структура отвечает другому пику, движущемуся налево на этом рисунке. Так как компоненты, сдвинутые в синюю область, распространяются быстрее, чем сдвинутые в красную область, они опережают остальные, которые запаздывают по сравнению с входным импульсом. Это как раз то, что видно на рис. 3.15.

Можно задать вопрос: существуют ли солитоноподобные решения уравнения (3.6.10)? Оказывается, что если включён ВКР-член, то импульсно-подобных решений не существует, главным образом потому что соответствующее возмущение не гамильтонова типа [87]. Это свойство ВКР-члена можно пояснить, заметив, что вызванный ВКР красный сдвиг не сохраняет энергию импульса, так как часть этой энергии диссипирует из-за возбуждения молекулярных колебаний. Однако, были найдены топологические солитоны типа фронта (с бесконечной энергией) в виде [129]

$$u(z, \tau) = \left( \frac{3\tau}{4\tau_R} \right) \left[ \exp \left( \frac{3\tau}{\tau_R} \right) + 1 \right]^{-1/2} \exp \left( \frac{9iz}{8\tau_R^2} \right). \quad (3.6.13)$$

Солитоны типа фронта (кинки) возникают во многих физических системах, динамика которых описывается уравнением синус-Гордона. Применительно к волоконным световодам эти солитоны представляют



Рис. 3.17. Временные профили интенсивности солитонов типа фронта в виде оптической ударной волны для нескольких значений  $\tau_R$  [129]

фронт оптической ударной волны, которая сохраняет форму при распространении вдоль световода. На рис. 3.17 профили фронта показаны как зависимости  $|u(z, \tau)|^2$  для нескольких значений  $\tau_R$ . Крутизна фронта зависит от  $\tau_R$ , так что фронт становится всё более резким при уменьшении  $\tau_R$ . Хотя параметр  $N$  возрастает при убывании  $\tau_R$ , уровень мощности  $P_0$  (определяемый как мощность при  $\tau = 0$ ) сохраняется. Это можно увидеть, выразив  $P_0$  через параметр  $T_R$  при учёте (3.1.3) и (3.6.2), так что  $P_0 = 9|\beta_2|/(16\gamma T_R^2)$ . При типичных параметрах световода

$P_0 \sim 10$  кВт. Экспериментально наблюдать такие оптические фронты затруднительно из-за высоких требований к мощности. Солитон-фронт (3.6.13) получен при предположении  $u(z, \tau) = V(\tau) \exp(iKz)$  решением соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения для  $V(\tau)$ . Решение показывает, что солитон-фронты образуют однопараметрическое семейство с различными зна-

чениями  $K$  и существуют даже в области нормальной дисперсии световода [130]. Они по-прежнему существуют, даже если в (3.6.1) включён член, отвечающий самообострению. Аналитический вид (3.6.13) получен только для частного значения  $K = 9/(8\tau_R^2)$ . Если  $K < \tau_R^2$ , монотонно убывающие хвосты, видимые на рис. 3.17, превращаются в осциллирующие структуры.

3.6.4. Распространение фемтосекундных импульсов. Для фемтосекундных импульсов с длительностью  $T_0 < 1$  пс необходимым становится включить в (3.6.1) все члены высших порядков, так как все три параметра —  $\delta_3$ ,  $s$  и  $\tau_R$  — оказываются значимыми. Эволюция таких ультракоротких импульсов изучается численным решением (3.6.1) [133–136]. Как пример, на рис. 3.18 показаны форма импульса и спектр при вводе в световод солитона второго порядка при  $\delta_3 = 0,03$ ,  $s = 0,05$  и  $\tau_R = 0,1$ . Эти значения отвечают импульсу длительностью 50 фс ( $T_0 \approx 30$  пс), распространяющемуся в области длин волн 1,55 мкм стандартного кварцевого световода. Распад солитона происходит на солитонном периоде ( $z_0 \approx 5$  см) и главный пик смещается при увеличении расстояния к заднему фронту с большой скоростью. Этот временной сдвиг вызван убыванием групповой скорости  $v_g \equiv (d\beta/d\omega)^{-1}$ , возникающим в результате красного сдвига спектра солитона. Сдвиг несущей частоты солитона меняет его скорость из-за частотной зависимости  $v_g$ . Если положить  $T_0 = 30$  фс, чтобы привести результаты рис. 3.18 к размерным единицам, несущая частота импульса длительностью 50 фс будет сдвинута почти на 40 ТГц, или на 20%, после прохождения расстояния всего 15 см.

Если входная пиковая мощность достаточно велика, чтобы возбудить солитон высшего порядка с  $N \gg 1$ , спектр импульса преобразуется в несколько полос, отвечающих расщеплению исходного импульса на фундаментальные солитоны. Такой вид эволюции наблюдался при распространении импульсов с длительностью 830 фс с пиковой мощностью 530 Вт на расстоянии до 1 км [134]. Спектральный пик в дальней-

Рис. 3.18. Эволюция формы импульса и спектра в случае  $N = 2$ . Значения остальных параметров:  $\delta_3 = 0,03$ ,  $s = 0,05$  и  $\tau_R = 0,1$

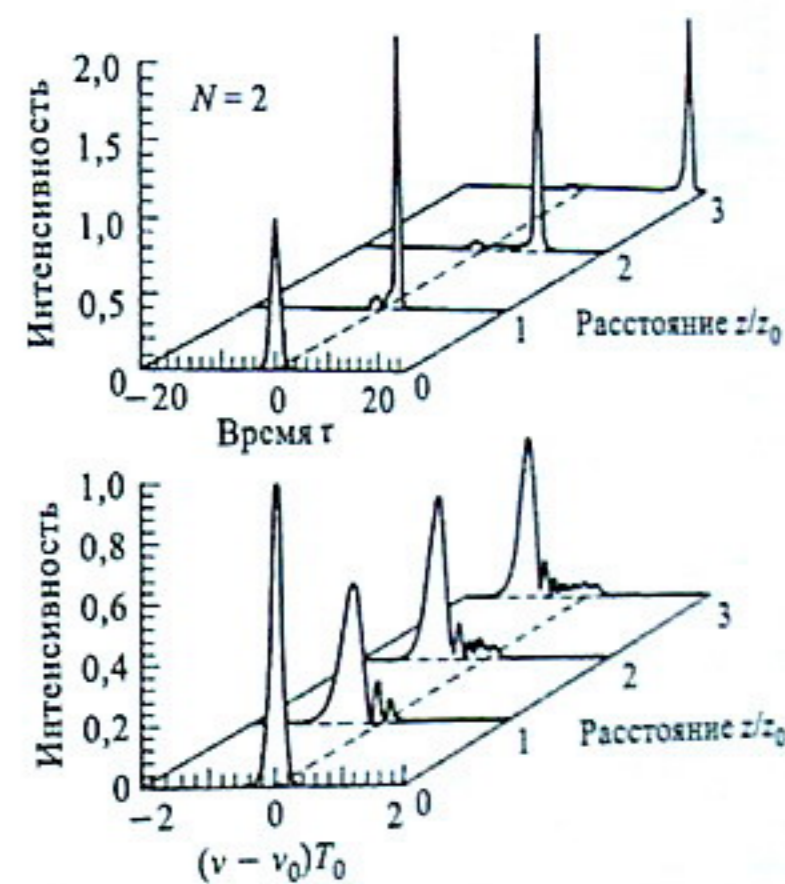


Рис. 3.18. Эволюция формы импульса и спектра в случае  $N = 2$ . Значения остальных параметров:  $\delta_3 = 0,03$ ,  $s = 0,05$  и  $\tau_R = 0,1$

Если входная пиковая мощность достаточно велика, чтобы возбудить солитон высшего порядка с  $N \gg 1$ , спектр импульса преобразуется в несколько полос, отвечающих расщеплению исходного импульса на фундаментальные солитоны. Такой вид эволюции наблюдался при распространении импульсов с длительностью 830 фс с пиковой мощностью 530 Вт на расстоянии до 1 км [134]. Спектральный пик в дальней-

Рис. 3.18. Эволюция формы импульса и спектра в случае  $N = 2$ . Значения остальных параметров:  $\delta_3 = 0,03$ ,  $s = 0,05$  и  $\tau_R = 0,1$

ничена интервалом

$$\Omega_s^2 \leq \Omega^2 \leq \Omega_s^2 + \Omega_c^2. \quad (7.1.11)$$

В обоих случаях пространственно-временная модуляционная неустойчивость может превратить пучок непрерывного излучения в последовательность сверхкоротких импульсов, одновременно разбивая его на пространственные нити. Случай самодефокусировки более интересен, так как частоту повторения последовательности импульсов можно сделать весьма большой за счёт увеличения  $\Omega_s$  и  $\Omega_c$ .

## 7.2. Оптические пули и их устойчивость

Наличие пространственно-временной модуляции означает, что комбинация самофокусировки, дифракции и дисперсии может приводить к формированию световых волновых пакетов, которые остаются ограниченными по всем трём пространственным координатам (конечная длительность импульса отвечает его конечной длине по направлению распространения). Такой ограниченный волновой пакет часто называют *световой пулей*, и он представляет обобщение самоканализированных оптических пучков во временную область. Существование и устойчивость самоканализированных пучков в нелинейной среде изучается с 1964 г., когда впервые было обнаружено это явление [11–14]<sup>1)</sup>.

**7.2.1. Решения с сохраняющейся формой.** В предыдущих главах мы видели, что в одномерном случае НУШ имеет решения, сохраняющие форму при распространении. Зададимся вопросом, существуют ли такие решения в многомерном случае. Чтобы найти решения (7.1.1) с сохраняющейся формой, удобно записать это уравнение в безразмерной форме, введя

$$z = Z/L_d, \quad x = X/w_0, \quad y = Y/w_0, \quad (7.2.1)$$

$$\tau = T/(w_0^2 \beta_0 \beta_2)^{1/2}, \quad u = (\gamma L_d)^{1/2} A, \quad (7.2.2)$$

где  $w_0$  — масштаб пространственной ширины и  $L_d = \beta_0 w_0^2$  — дифракционная длина. Для нормированной амплитуды  $u$  (7.1.1) можно записать так:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - s_d \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) + |u|^2 u = 0, \quad (7.2.3)$$

где  $s_d = \text{sign}(\beta_2)$ .

Последнее уравнение показывает полную эквивалентность между пространственными и временной координатами, если дисперсия аномальна ( $\beta_2 < 0$ ). Мы остановимся на случае аномальной ДГС и используем эту симметрию для решения (7.2.3), положив  $s_d = -1$ . Полезно

<sup>1)</sup> Напомним, что самоканализирование световых пучков предсказано в 1962 г. Г. А. Аскарьяном, как это и указывают авторы в гл. 2. (Прим. ред.)

ввести трёхмерный вектор  $\mathbf{R}$  с компонентами  $x$ ,  $y$  и  $\tau$  и записать (7.2.3) в компактной форме:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \nabla_R^2 u + |u|^2 u = 0, \quad (7.2.4)$$

где  $\nabla_R^2$  — оператор Лапласа.

Сохраняющие форму решения (7.2.4) можно получить, если искать решение в виде

$$u(x, y, \tau, z) = U(x, y, \tau) \exp(i\kappa_0 z), \quad (7.2.5)$$

где  $\kappa_0$  — постоянная распространения. Так как  $U$  не зависит от  $z$ , такой импульс распространялся бы без изменения пространственной или временной формы, что приводит к световой пуле. Если записать лапласиан в (7.2.4) в сферических координатах и ограничиться сферически симметричными решениями,  $U(x, y, \tau)$  будет зависеть только от  $R \equiv (x^2 + y^2 + \tau^2)^{1/2}$  и удовлетворит обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{d^2 U}{dR^2} + \frac{(D-1)}{R} \frac{dU}{dR} \right] - \kappa_0 U + U^3 = 0. \quad (7.2.6)$$

Это уравнение следует решать с граничным условием  $U(\infty) = 0$ . Параметр  $D$  принимает значения 1, 2 и 3, в зависимости от размерности вектора  $\mathbf{R}$ . Одномерный случай ( $D = 1$ ) отвечает чисто пространственным или временным солитонам, обсуждавшимся в предыдущих главах. Двумерный случай ( $D = 2$ ) применим к самофокусировке пучков непрерывного излучения, он рассматривался в гл. 6. Он также описывает распространение импульса внутри планарных волноводов. Трёхмерный случай отвечает коротким оптическим импульсам, распространяющимся в объёмной нелинейной среде.

Как обсуждалось в 1.2.4, при  $D = 1$  легко найти аналитическое решение (7.2.6) в виде  $\text{sch}(R)$ , отвечающее либо пространственному ( $R = x$ ), либо временному ( $R = \tau$ ) солитону.

Для  $D > 1$  (7.2.6) можно решить численно. Такие численные решения были получены при  $D = 2$  в 1960-х годах [11]. В действительности было найдено бесконечное число решений (7.2.6), аналогичных фундаментальному решению и решениям высших порядков при  $D = 1$  [12]. Решение  $m$ -го

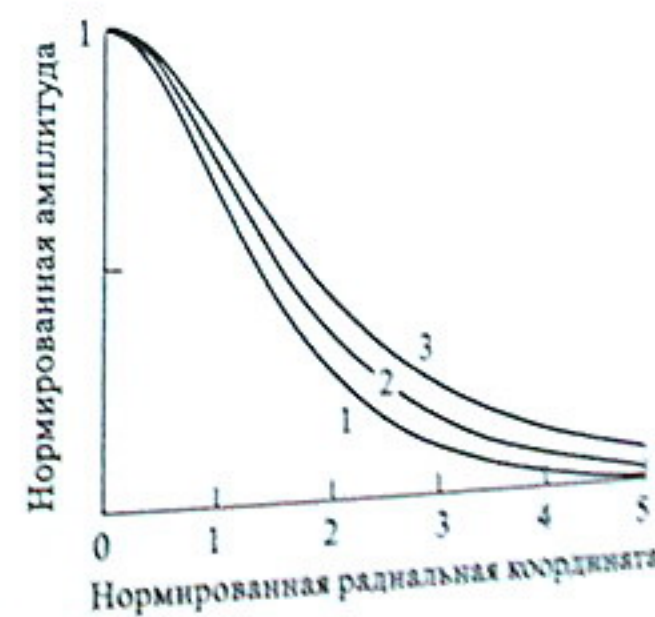


Рис. 7.2. Сохраняющие форму решения НУШ при  $D = 1, 2, 3$ . Амплитуда нормирована на 1 при  $R = 0$  [15]

порядка при  $D = 2$  проявляется как центральное пятно, окружённое  $m$  кольцами.

В случае  $D = 3$  (7.2.6) решалось численно. Основной интерес представляет решение низшего порядка, так как оно отвечает световой пуле. Это решение показано на рис. 7.2, где представлена зависимость  $U(R)/U(0)$  от  $R$  и её сравнение с соответствующими решениями при  $D = 1$  и  $2$ . Постоянная распространения  $\kappa_0$  в каждом случае различается и имеет значение  $0,5$  ( $D = 1$ ),  $0,2055$  ( $D = 2$ ) и  $0,05316$  для  $D = 3$  [15]. Пиковая амплитуда  $U_0$  также различна в этих трёх случаях. Полезно ввести параметр, представляющий энергию импульса и определяемый соотношением

$$E = \int |u|^2 d^D R, \quad (7.2.7)$$

где интегрирование проводится по всей области  $D$  измерений. Для фундаментальных решений, показанных на рис. 7.2,  $E = 2$  при  $D = 1$ ,  $E = 7,850$  при  $D = 2$  и  $E = 28,87$  при  $D = 3$ . Отметим, что в чисто пространственном случае пучка непрерывного излучения  $E$  имеет смысл полной мощности излучения.

**7.2.2. Пространственно-временной коллапс.** Устойчивость любого решения с сохраняющейся формой, найденного решением (7.2.4), следует проверить линейным анализом устойчивости, аналогичным применявшемуся для непрерывного излучения в разделе 7.1. Такой анализ [16] показывает, что решения с сохраняющейся формой устойчивы только при  $D = 1$ . При  $D > 1$  малые флуктуации интенсивности, ширины пучка или длительности импульса могут нарастать при распространении и приводить к явлению, называемому *пространственно-временным коллапсом* (или *коллапсом пучка* применительно к пучку непрерывного излучения). Вследствие этой неустойчивости импульс с энергией, превышающей критическое значение  $E_c$ , сжимается таким образом, что интенсивность  $|u|^2$  становится бесконечно большой на конечном расстоянии, тогда как пространственная и временная протяжённость пучка стремится к нулю.

Коллапс пучков непрерывного излучения интенсивно изучался применительно к самофокусировке [17–25]. Используемые при этом методы могут быть применены и для изучения пространственно-временного коллапса [26]. Для решения этой задачи полезен вариационный метод, основанный на лагранжевой формулировке классической механики [27]. Здесь мы следуем методу моментов, основанному на теореме вириала [13]; в 1994 г. он был применён для изучения влияния пространственного и временного чирпа на порог пространственно-временного коллапса [28].

Как показано в гл. 2 и 4, для анализа свойств солитонов весьма полезно использование законов сохранения, связанных с  $(1+1)$ -мерным НУШ. Многомерное НУШ (7.1.1) также обладает несколькими сохраняющимися величинами [14, 21]. Энергия импульса  $E$ , определя-

емая (7.2.7), служит трёхмерным аналогом мощности  $P$ , введённой как сохраняющаяся величина в (2.1.3). Инвариантность НУШ по отношению к сдвигам координат и времени приводит к двум другим сохраняющимся величинам:

$$M = \frac{1}{2i} \int (u^* \nabla_R u - u \nabla_R u^*) d^D R, \quad (7.2.8)$$

$$H = \frac{1}{2} \int (|\nabla_R u|^2 - |u|^4) d^D R. \quad (7.2.9)$$

По физическому смыслу  $M$  и  $H$  аналогичны импульсу и гамильтониану, соответственно, введённым ранее в 2.1.1.

В методе моментов эти три сохраняющиеся величины —  $E$ ,  $M$  и  $H$  — используются для нахождения первого и второго моментов величины  $R = (x^2 + y^2 + \tau^2)^{1/2}$ , определяемых соотношением

$$\langle R^n \rangle = \frac{\int R^n |u|^2 d^D R}{\int |u|^2 d^D R}, \quad (7.2.10)$$

где  $n$  — целое число. Пространственно-временной коллапс изучается с помощью (статистической) дисперсии

$$\sigma^2 = \langle R^2 \rangle - \langle R \rangle^2, \quad (7.2.11)$$

где  $\sigma$  характеризует пространственную и временную протяжённость оптического импульса. Если  $\sigma$  стремится к нулю, размеры пучка уменьшаются по всем трём измерениям ( $x$ ,  $y$  и  $\tau$ ) одновременно, и пучок подвергается пространственно-временному коллапсу.

Из (7.2.8)–(7.2.11) следует, что  $\sigma^2$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка [28]

$$\frac{d^2 \sigma^2}{dz^2} = \frac{1}{E} \left[ 4H - \frac{2M^2}{E} - (D-2) \int |u|^4 d^D R \right]. \quad (7.2.12)$$

Если выражение в квадратных скобках отрицательно,  $\sigma^2$  убывает монотонно с ростом длины среды  $z$ , обращаясь в нуль на конечном расстоянии, отвечающем пространственно-временному коллапсу. В общем случае (7.2.12) не решается из-за последнего члена. Особым является двумерный случай ( $D = 2$ ), так как тогда этот член исчезает. Мы рассмотрим сначала случай  $D = 2$ .

**7.2.3. Распространение импульса в планарных волноводах.** Рассмотрим сверхкороткий импульс, распространяющийся в планарном волноводе так, что пучок дифрагирует в направлении оси  $x$ , но ограничен по оси  $y$ . Даже в этом случае характер пространственно-временного коллапса зависит от входных параметров, таких как ширина пучка, длительность импульса и его энергия. Он зависит также от того, является ли входной импульс чирпированным и искривлённым